# EUCLIDES

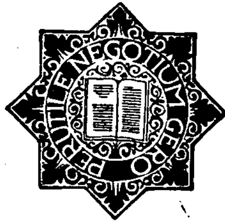
## TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES



6e JAARGANG 1929/30, Nr. 2




P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

**Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken,** verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

**Artikelen** ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

**Het honorarium** voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

**Boeken ter bespreking** en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119

---

INHOUD.



---

 De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. C. H. VAN OS; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

---

# EEN OUDE WISKUNDIGE NATUURWET IN DE OUDHEID ZELVE VERWORPEN

BESPROKEN DOOR

CH. M. v. DEVENTER.

---

[Porphyrius], levend in de derde eeuw na Kristus, haalt in zijn groot commentaar [1]) op Ptolemaeus' muziekleer berichten aan van Archytas [2]) en Didymus [3]), die ons in den aanvang der wiskundige fysika verplaatsen en toch reeds over de eerste toepassing van wiskunde op waarneming heen zijn. Die eerste toepassing toch schonk getallen voor de *consonanties* (octaaf, kwint en kwart), met waar- en proefneming onderzocht, [4]) en terwijl men ook deze getallen voor consonanties *wetten* kan noemen, gaan de bedoelde berichten over een poging om van die experimenteel kwantitatieve gegevens tot een hen allen te saam omvattende, dus hooger gepotentiëerde wet op te klimmen door beschouwingen, die, hoe nederig ook, wiskundige fysika in engeren zin heeten kunnen.

Een zéér klein begin draagt dit opstel aan, een begin van een milligram, maar uit dat milligram zijn de centenaars van Newton en Huygens gegroeid, en alleen daarom reeds verdient het eerbiedige aandacht, en aandacht zelfs voor zijn dwalingen, en daarom ook geef ik [Porphyrius'] tekst in het Grieksch, gevolgd door een vertaling, die, om zoo betrouwbaar mogelijk te zijn, wel barbaarsch-nauwkeurig wezen moest.

---

[1]) Uitgave van Wallis, Op. omn. III, p. 280. — Op enkele regels na is dit brok overgenomen in Diels' Vorsokratiker [2], I, p. 255—256, doch ik neem die regels mede op. — Deze *Porphyrius* is wellicht een ander man dan de gelijknamige Neo-platonist.

[2]) Archytas was tijdgenoot van Plato.

[3]) Didymus, tijdgenoot van keizer Nero.

[4]) Zie *Een foutieve Natuurwet* in dit tijdschrift.

# I.

Τῶν Πυθαγορικῶν τινες, ὡς Ἀρχύτας καὶ Δίδυμος ἱστοροῦσι, μετὰ τὸ καταστήσασθαι τοὺς λόγους τῶν συμφωνιῶν· συγκρίνοντες αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους, καὶ τοὺς συμφώνους μᾶλλον ἐπιδεικνύναι βουλόμενοι, τοιοῦτόν τι ἐποίουν· πρώτους λαβόντες ἀριθμούς, οὓς ἐκάλουν πυθμένας, τῶν τοὺς λόγους τῶν συμφωνιῶν ἀποτελούντων· τουτέστιν ἐν οἷς ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς συμφωνίαι ἀποτελοῦνται: ὡς, λόγου χάριν, ἡ μὲν διὰ πασῶν ἐν πρώτοις θεωρεῖται ἀριθμοῖς τοῖς β̄ καὶ ᾱ· Πρῶτος γὰρ διπλάσιος, ὁ δύο τοῦ ἑνός, καὶ πυθμὴν[1]) τῶν ἄλλων διπλασίων· ἡ δὲ διὰ τεσσαρῶν, ἐν ἐπιτρίτοις, τοῖς τέσσαρσι καὶ τρισί· πρῶτος γὰρ ἐπίτριτος καὶ πυθμήν, ὁ δ̄ τοῦ γ̄. Τούτους οὖν τοὺς ἀριθμοὺς ἀποδόντες ταῖς συμφωνίαις· ἐσκόπουν, καθ' ἕκαστον λόγον, τῶν τοὺς ὅρους περιεχόντων ἀριθμῶν, ἀφελόντες ἐφ' ἑκατέρων τῶν ὅρων ἀνὰ μονάδα· τοὺς ἀπολειπομένους ἀριθμούς, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, οἵτινες εἶεν· οἷον τῶν β̄ καὶ ᾱ· οἵπερ ἦσαν τῆς διὰ πασῶν· ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα, ἐσκόπουν τὸ καταλειπόμενον· ἦν δὲ ἕν. τῶν δὲ τεσσάρων καὶ τριῶν, οἵτινες ἦσαν τῆς διὰ τεσσάρων· ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα, εἶχον, ἐκ μὲν οὖν τῶν τεσσάρων ὑπολειπόμενον τὸν τρία· ἐκ δὲ τῶν τριῶν, τὸν δύο· ὥστε ἀπὸ συναμφοτέρων τῶν ὅρων, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, τὸ ὑπολειπόμενον ἦν πέντε. τῶν δὲ γ̄ καὶ β̄, οἵτινες ἦσαν τῶν διὰ πέντε, ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα, εἶχον ἐκ μὲν τριῶν ὑπολειπόμενα δύο· ἐκ δὲ τῶν δύο, ὑπολειπόμενον ἕν· ὥστε τὸ συναμφότερον <τὸ ὕπο>[2]) λειπόμενον ἦν τρία· Ἐκάλουν δέ, τὰς μὲν ἀφαιρουμένας μονάδας, ὅμοια, τὰ δὲ λειπόμενα μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, ἀνόμοια· διὰ δύο αἰτίας· ὅτι ἐξ ἀμφοῖν τῶν ὅρων, ὁμοία ἡ ἀφαίρεσις ἐγίνετο καὶ ἴση· ἴση γὰρ ἡ μόνας τῆι μονάδι· ὧν ἀφαιρουμένων, ἐξ ἀνάγκης τὰ ὑπολειπόμενα ἀνόμοια καὶ ἄνισα. Ἐὰν γὰρ ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῆι, τὰ λοιπὰ ἔσται ἄνισα. Οἱ δὲ πολλαπλάσιοι λόγοι καὶ ἐπιμόριοι, ἐν οἷς θεωροῦνται αἱ συμφωνίαι, ἐν ἀνίσοις ὅροις ὑφεστήκασιν· ἀφ' ὧν, ἴσων ἀφαιρουμένων, τὰ λοιπὰ πάντως ἄνισα· γίνεται οὖν τὰ ἀνόμοια τῶν συμφωνιῶν συμμισγέντα, συμμίσγειν δὲ λεγουσιν οἱ Πυθαγόρειοι, τὸ ἕνα ἐξ ἀμφοτέρων ἀριθμὸν λαβεῖν· Ἔσται οὖν τὰ ἀνόμοια συντεθέντα, καὶ καθ' ἑκάστην τῶν συμφωνιῶν, τοιαῦτα· τῆς μὲν διὰ πασῶν, ἕν· τῆς δὲ διὰ τεσσάρων, ε̄· τῆς δὲ διά πέντε τρία· Ἐφ' ὧν δ' ἂν φασί τὰ ἀνόμοια ἐλάσσονα ἦι, ἐκεῖνα τῶν ἄλλων εἰσὶ συμφωνότερα· Σύμφωνον μέν ἐστιν ἡ διὰ πασῶν· ὅτι ταύτης τὰ ἀνόμοια ἕν· μεθ' ἣν ἡ διὰ πέντε, ὅτι ταύτης τὰ ἀνόμοια, τρία. Τελευταία δὲ ἡ διὰ τεσσάρων· ὅτι ταύτης τὰ ἀνόμοια, πέντε.

[1]) πυθμὴν is hier emendatie van Wallis voor πυθμένας. Ook de interpunctie van W. is behouden. De enkele spatieeringen zijn van Diels. [2]) Inlasch van Diels.

VERTALING:

Naar Archytas en Didymus verhalen, deden eenigen der Pythagoreërs, toen zij, na het vaststellen van de verhoudingen (*λόγοι*) der consonanties, deze [verhoudingen] onderling wilden beoordeelen, en de consoneerende [verhoudingen] nader duidelijk maken (*ἐπιδεικνύναι*), ongeveer het volgende.

Zij namen de eerste getallen, die zij grondgetallen (*πυθμένας*) noemden, van die, welke de verhoudingen der consonanties bewerken [1]) — d.i. de kleinst mogelijke getallen door welke de verhoudingen tot stand komen, zooals bijv. de octaaf in de eerste getallen 2 en 1 wordt gezien (*θεωρεῖται*); twee van één toch is het eerste tweevoud, en grondgetal (*πυθμήν*, emendatie van Wallis voor *πυθμένας*) der andere tweevouden; en de kwart [wordt gezien] in de vier-derde [verhoudingen] in die van 4 en 3, want de eerste vier-derde [verhouding] en grondgetal (*πυθμήν*) is de vier van drie. [2])

---

[1]) Voor de octaaf bijv. waren de getallen, volgens de proef, 20 lengte-eenheden en 10, of 16 en 8, of 14 en 7, en die getallen maakten dan de verhoudingen 20 : 10, 16 : 8, 14 : 7; doch in deze getallen wordt de verhouding der eerste getallen 2 en 1 gezien.

De eerste getallen zullen hier wel niets anders zijn dan de 1, 2, 3 en 4, die te samen de bij de Pythagoreërs zoo geëerde *tetraktys* uitmaakten, en dan ook bij Theo Smyrnaeus (uitg. Hiller, p. 94) in betrekking tot die tetraktys *πρῶτοι ἀριθμοί* genoemd worden.

[2]) Er schijnt in dit alles een zekere verwarring te bestaan van *getal* met *verhouding*, van grondgetal met grondverhouding, waar *πυθμήν* zoowel het eerste als het laatste schijnt te beteekenen, zooals dan [Porphyrius] ook op p. 287 de meeste Pythagoreërs ook van het grondgetal (*ἀπὸ τοῦ πυθμένος ἀριθμοῦ*) laat uitgaan. Hij haalt daarbij (p. 288) woordelijk (*κατὰ λέξιν*) de volgende uiting aan van Eudemus over de Pythagoreërs: *῎Ετι δὲ τοὺς τῶν τριῶν συμφωνιῶν λόγους, τοῦ τε διὰ τεσσάρων, καὶ τοῦ διὰ πέντε, καὶ τοῦ διὰ πασῶν, ὅτι συμβέβηκεν, ἐν πρώτοις ὑπάρχει τοῖς ἐννέα· β̄ γὰρ γ̄, δ̄ γίνεται ἐννέα.* (Voorts, dat het gevalt, dat de verhoudingen der drie consonanties — de kwart, de kwint en de octaaf — in het eerste negental voorhanden zijn, want 2, 3 en 4, maken 9. — (Hierbij wordt door den vertaler *ὑπάρχει* vervangen door den infinitief *ὑπάρχειν*, om zin aan het citaat te geven.)

Men is hier blijkbaar in de diepste lagen der historische wiskunde. Wellicht wilden de Pythagoreërs de één niet onder de *getallen* opnemen, en begonnen zij de rij met de 2. Wellicht daarom zagen zij in een heel getal niet een „veelvoud" van één, en in de geheele tweevouden niet een echte „verhouding"; zij lieten dan maar in het midden wat zoo'n veelvoud dan *wel* was, en behandelden het nu eens als een getal, dan weer als een verhouding. Verg. hierbij het Naschrift van dit opstel.

Die getallen nu gaven zij aan de consonanties, en voor iedere verhouding gingen zij na, terwijl zij van de getallen, die de grenstonen (*ὅροι*)[1]) vastleggen (*περιέχειν*), voor ieder der grenstonen een eenheid wegnamen, welke na die wegneming de overgebleven getallen waren. Zooals van 2 en 1, die dan de getallen der octaaf waren, namen zij een eenheid weg en beschouwden het overgeblevene: dit was één. Van de vier en de drie, die dan [de *horoi*] voor de kwart waren, namen zij een eenheid weg, en kregen uit de *vier* als overschot de *drie,* en uit de *drie* de *twee,* zoodat van de twee grenzen (*horoi*) te samen het overschot *vijf* was. Van *drie* en *twee,* die dan de grenzen der kwint waren, namen zij een eenheid weg, en kregen uit de *drie* als overschot *twee,* en uit de *twee* als overschot *één,* zoodat het overschot van beiden te saam *drie* was. Zij noemden nu de weggenomen eenheden *gelijke dingen* (*ὅμοια*) en het overgeschotene na de wegneming *ongelijke dingen* (*ἀνόμοια*) om twee redenen, daar de wegneming uit beide grenzen *gelijk* (*ὁμοία*) was en even groot (*ἴση*). [2]) De eenheid toch is aan de eenheid gelijk, en als die [eenheden] weggenomen zijn, zijn de overschotten noodwendig ongelijk en niet even groot. Als men toch van ongelijke [zaken] (*ἄνισα*) gelijke [zaken] (*ἴσα*) wegneemt, zullen de overschotten ongelijk zijn.

De veelvoudige en één-meerige [3]) verhoudingen nu, waarin de

---

[1]) Ieder interval, een kwart bijv., kan bij verschillende punten der octaaf beginnen; maar altijd is er een hoogste en een laagste toon, die gezamenlijk als het ware een zeker tonen-veld afpalen, en daarom de *grenzen* van dat veld zijn. Die hoogste en laagste toon zijn de *horoi* der kwart, en wààr de kwart ook begint, altijd zal er bij de *horoi* een verhouding behooren van de zelfde getallen 4 en 3. Het schijnt, dat [P o r p h y r i u s] ook die getallen zelf wel *horoi* noemt, in overeenstemming met het spraakgebruik der wiskunde, dat onder *horos* in het algemeen de termen eener evenredigheid verstond.

[2]) [P o r p h y r i u s] geeft geen nader toelichting over het zonderlinge verschil tusschen *homoios* en *isos*. Schrijver dezer waagt de onderstelling, dat in de oud-pythagorische wiskunde het woord *ὅμοιος* gebruikt werd voor wat later *ἴσος* heette. Nog veel later definieert S m y r n a e u s (ed. Hiller, p. 82) de evenredigheid als een *homoiotês* of *tautotês* van twee verhoudingen (*logoi*).

[P o r p h y r i u s] wilde dan het oude woord behouden, doch hij lichtte het toe met een nieuweren vakterm.

*Alles* verklaart deze onderstelling echter niet.

[3]) De antieke muziekleer werkt druk met het begrip *ἐπιμόριος λόγος*, de verhouding $(n+1):n$. Ik bied er voor aan *één-meerige* verhouding en gebruik voor *ἐπίτριτος* (4 : 3) de uitdrukking *vier-derde* (verhouding).

consonanties aanschouwd worden (*θεωροῦνται*), liggen ten grondslag (*ὑφεστηκάσιν*) aan ongelijke grenzen (*ὅροι*), en als daarvan gelijke [zaken] worden weggenomen, zijn de overschotten geheel ongelijk. De ongelijke [zaken] (*ἀνόμοια*) der consonanties zijn dus *samengemengde* [zaken]: samenmengen (*συμμίσγειν*) toch noemen de Pythagoreëers één getal uit twee maken.

Als nu die ongelijke [zaken] bijeengeplaatst worden en bij ieder der consonanties, dan zullen zij de volgende zijn: voor de *octaaf* één, voor de *kwart* vijf, voor de *kwint* drie. En nu beweren zij: naarmate de ongelijke [zaken] (*ἀνόμοια*) kleiner zijn, zijn zij meer consoneerend dan de anderen. Consoneerend nu is de *octaaf,* wijl daarvoor de ongelijke [zaken] één zijn; daarna de *kwint,* wijl daarvan de ongelijke [zaken] *drie* zijn. Het laatste komt de *kwart,* wijl voor deze de ongelijke [zaken] *vijf* zijn.

## II.

Uit dit citaat van [Porphyrius] mag men overnemen en afleiden:

*a.* dat de oude Pythagoreërs de 3 consonanties niet alleen verbonden aan drie bepaalde verhoudingen (2 : 1, 3 : 2, 4 : 3) maar ook uit die enkele gegevens een algemeene wet destilleerden: *consonanties hebben òf een veelvoudige òf een één-meerige verhouding;*

*b.* dat volgens hen bij méér (beter, schooner) consoneerende tweeklanken kleiner getallen behooren;

*c.* dat de octaaf[1]) beter is dan de kwint, en de kwint dan de kwart;

*d.* dat dit laatste ook door de rede bewijsbaar is;

en naar het schijnt, is het grootste deel van het brok aan dat bewijs besteed.

In zekeren zin is het eerste punt het belangrijkst. Die oude Pythagoreërs durfden het aan om van getallen op te klimmen tot algemeene regels over die zelfde getallen, en hoezeer men verbaasd

---

[1]) [Porphyrius] noemt hier de octaaf niet rechtuit de schoonste tweeklank, maar het verband van zijn verhaal sluit die meening in, terwijl wij bij Ptolemaeus' *Harmonika,* I. 5, p. 20 (Ed. Wallis, 1682) die meening ook genoemd vinden in het overzicht der pythagorische leering met de woorden: *τῶν δὲ συμφωνιῶν, ἡ διὰ π. ἐστὶ καλλίστη* (van de consonanties is de octaaf de schoonste).

mag staan, dat zij daartoe genoeg meenden te hebben aan zulk een uiterst beperkte hoeveelheid van getallen, men moet toegeven: zij deden iets wat in de fysika nog altijd gebeurt, en het milligram waarvan dit opstel in zijn aanvang sprak, is dààrdoor reeds gerechtvaardigd.

Voorts eerden zij de waarneming, want de waarneming was het, die het bestaan van consonanties leerde, en het was op dit waarnemingsfeit, dat zij hun wiskundig overleg richtten.

En men vergete niet, hoe er ook veel waar- en proefneming noodig was om de verhoudingen (2 : 1), (3 : 2), (4 : 3) te doen kennen. Snaren van allerlei lengten, velerlei dikten moesten onderzocht worden, en zoo de pijp-instrumenten óók hun bijdragen leverden, ook *die* waren niet altijd van de zelfde afmetingen. Er was reeds veel werk gedaan, vóór die pioniers tot hun wet van veelvoudige en éénmeerige verhouding kwamen.

Dat de octaaf *beter* was dan de kwint en de kwint *beter* dan de kwart, ook *dit* inzicht mag men eer vóór dan tegen hen doen getuigen.

En eindelijk, hun verlangen om dit laatste met wiskunde te bewijzen; hun overtuiging van de mogelijkheid van zulk een bewijs, behoeft men hen niet te kwade te duiden, terwijl de hulpstelling: bij betere consonanties behooren kleine getallen, hun te vergeven is, waar de ervaring, de waarneming, de natuur, nu eenmaal met de schoone *octaaf* ze scheen op te dringen.

Het gevaar van het *apriorisme* dreigt hier echter wel, en wellicht meer nog dan nu reeds te zien is. Want al spreken Ptolemaeus noch [Porphyrius] ten deze van de Pythagorische tetraktys,[1]) men mag vreezen, dat het heilige viertal 1, 2, 3, 4 mede van invloed was om de getallen der consonanties als aanwijzingen van hooger orde te beschouwen.

Maar hoeveel waardeering men tot zoover aan de wiskundige beschouwing der oude Pythagoreërs ook schenken moge, niets van dien aard kan de lezer van dezen dag gevoelen voor hun bewijs van de deugd der *kwint* boven de *kwart*. Mij althans gelukt het niet in dat betoog iets anders dan jammerlijk geknoei te zien, een erbarmelijke poging om met geleerden omhaal hun hulpstelling toe te

---

[1]) Deze *tetraktys* was niet de eenige (Th. Smyrn. Hill. p. 93 vlgg.), maar wel bij de oude Pythagoreërs in bijzondere eere.

passen: bij een *betere* consonantie behoort een *kleiner* getal. En waartoe diende die omhaal? Waarom zeiden zij niet kortweg $3 + 4 = 7$, $3 + 2 = 5$, $2 + 1 = 3$? Dan was dadelijk de kwart beneden de kwint, de kwint beneden de octaaf gebracht. Misschien hadden zij redenen om anders te doen, door ons moeilijk te doorgronden, maar welke die redenen ook waren, hun gehaspel met *gelijke zaken* en *ongelijke zaken* kan niet anders dan geknoei heeten.

Want zij deden toch aldus:

Naast elkaar plaatsten zij de verhoudingen:

2 : 1 3 : 2 4 : 3

Van alle getallen namen zij een eenheid weg, en hielden dus over:

1 niets 2 1 3 2

Nu telden zij voor ieder paar de resten samen, en kregen dan:

1 3 5

en vonden dan voor de kwint een kleiner getal dan voor de kwart. Maar zij vonden dat met een verkrachting van den wiskundigen zin der verhouding, waarvoor men ook aan pioniers bezwaarlijk genade schenken kan. [1])

III.

Voor dit opstel is hoofdzaak de wet: consonanties hebben veelvoudige of één-meerige verhoudingen.

Doch terwijl men zich verbazen mag over de stoutmoedigheid dier beginners, mag men wel vragen of er in de ervaring niet méér was, dat hen steunen kon, en in het bijzonder of het feit der *hoogere* octaven hun niet bekend was en *moest* zijn: de eerste hoogere octaaf toch was zelf de eerste octaaf der eerste, en dat die eerste hoogere dan de verhouding 4 : 1 tot den grondtoon had, dàt, zou men zoo zeggen, moest toch ook aan pioniers duidelijk zijn en hen sterken in hun geloof aan de algemeene wet.

Nu verklaart echter A r i s t o x e n u s beslistelijk, [2]) dat hij

---

[1]) De wiskundige zin eener verhouding is toch juist *die* verhouding, en die verdwijnt, zoo men beide termen met een gelijk getal vermindert. Zie echter het *Naschrift* (*c*) bij dit opstel.

[2]) Zie zijn *Harmonische Fragmenten,* uitg. M a r q u a r d (1868), p. 64, § 45. In verband met § 20 (p. 28) mag men de volgende vijf

enkel de *drie eerste* consonanties van voorgangers overnam, en de andere (*vijf* bij hem[1])) zelf invoerde. Aristoxenus nu was evenals Archytas Tarentijn, doch leefde *na* dien meester, en zijn uitspraak schijnt dus Archytas en diens voorgangers zonder voorbehoud te treffen. Waar nu echter ook de Timaeus aan Aristoxenus vooraf ging, en dàt geschrift wel degelijk hoogere octaven vermeldt, mogen wij wellicht, wat de jongere Tarentijn „voorgangers" noemt, als schrijvers van *handleidingen* over muziekleer opvatten, en niet allen die over muziek gedacht, gesproken en geschreven hadden; misschien was niet eenmaal Archytas' werk over de muziek zulk een handleiding. Om Aristoxenus behoeft men dus niet aan de eerste Pythagoreërs bekendheid met de consonantie der dubbele octaaf te ontzeggen, hoewel zij dan wellicht dàt feit wel als een welkomen steun aanzagen, maar het niet onderstreepten, waar hun aandacht inderdaad zich vooral tot het dubbele *tetrachord* schijnt bepaald te hebben.

En zeker is, dat in niet veel later tijd de pythagorische muziekleer verder ging dan de enkele octaaf: Euclides' *Sectio Canonis* noemt de dubbele octaaf als een ware consonant, en daarbij ook de *duodeciem,* terwijl zij de *undeciem* voorbij gaat, in overeenstemming met het pythagorische leerstuk, dat de *duodeciem* (3 : 1) toelaat, doch de *undeciem* (8 : 3) verbiedt.[2])

Ptolemaeus eindelijk polemiseert zóó beslistelijk, niet alleen tegen de wet en tegen het „geknoei" der Pythagoreërs, maar ook tegen de uitsluiting der *undeciem,* dat men wel gelooven moet, ook voor zijn dagen (tweede eeuw na Kristus), aan het bestaan van één

---

consonanties door Ar. bij de drie eenvoudigsten doen voegen: undeciem, duodeciem, dubbel-octaaf, en kwart en kwint der dubbele octaaf. Aristoxenus werd geboren ongev. 350 v. Kr., toen Archytas hoog bejaard was of niet meer leefde.

[1]) Volgens [Porphyrius] (W. III. 270) namen ook Dionysius en Eratosthenes *acht* consonanties aan. Ptolemaeus, wiens tonenveld niet buiten twee octaven gaat, aanvaardt er zes: kwart, kwint, octaaf, undeciem, duodeciem, dubbele octaaf.

[2]) in § 12, uitg. Janus, p. 160. — In § 10 verklaart de Sectio dat de dubbele octaaf consoneerend is, en dus *ἐπιμόριόν ἐστιν, ἤ πολλαπλάσιον* (één-meerig is of veelvoudig van verhouding), terwijl *verhouding* daar ter plaatse *διάστημα* luidt. Deze terminologie vindt men ook bij Archytas ([Porphyrius], p. 276) en volgens [Porphyrius] (Ib.) bij de meeste Pythagoreërs. Euclides heeft echter ook een enkele maal *λόγος*.

of meer pythagorische handleidingen voor muziek, die oudere en nieuwere bestanddeelen, en daarmee ook hoogere consonanties, naast elkander opnamen. [1])

Men kan zelfs vermoeden, dat de oudste pioniers ook dààrom niet zich beriepen op ervaringen, buiten de enkele octaaf gaand, wijl zij liever niet in ernstige aanraking kwamen met de *undeciem,* die voor hen nu eenmaal in onverzoenbaren strijd was met de wet der één-meerige verhouding.

Terwijl nu andere deelen van Ptolemaeus' kritiek wat verderop besproken worden, plaats ik hier reeds zijn afrekening met het „geknoei", en ik laat de opmerking vooraf gaan, dat wij juist aan dit ergerlijke betoog het lange citaat van [Porphyrius] over Archytas en Didymos danken, wijl deze breedsprakige doch niettemin zeer welkome commentator juist dat brok verstrekt tot opheldering van enkele korte regels bij Ptolemaeus, die inderdaad zonder de inlichting van den latere volkomen onverstaanbaar zouden zijn.

Ptolemaeus' afrekening is nu als volgt.[2])

Dat wiskundig geredeneer is dwaasheid. Want al drukt men een verhouding liefst door de kleinste getallen uit, volkomen de zelfde verhouding bestaat tusschen grootere: 12 : 6 is het zelfde als 2 : 1. Dàt vooreerst, en dan: àls men die drie verhoudingen onderling vergelijken wil, dan moet men in ieder van hen den kleinsten term even groot nemen, dus *niet*:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 : 1 | 3 : 2 | 4 : 3 |
| *doch* bijv. | | | |
| | 12 : 6 | 9 : 6 | 8 : 6 |

[1]) In zijn *Harmonika,* I. 5, geeft Pt. een overzicht van de pythagorische overlevering aangaande de consonanties; I. 6 polemizeert tegen menig deel dier overlevering, en I. 7 schetst een betere manier ter bepaling van haar verhoudingen.

[Porphyrius], in de voorrede van zijn commentaar (W. III, 191) verklaart, dat Pt. veel overnam van Didymus (tijdgenoot van Keizer Nero), die een werk schreef over het verschil tusschen de Pythagorische en de Aristoxenische muziekleer. Voorts maakt Porphyrius (W. III. 207, 209) melding van Ptolemaïs van Cyrene, schrijfster van een muziekleer op pythagorischen grondslag (Πυθαγορικὴ τῆς μουσικῆς στοιχείωσις) In zijn citaten uit deze schrijfster vind ik Ptolemaeus niet genoemd, en derhalve was *misschien* ook zij bron voor Pt.

[2]) *Harmonika,* I. 6 p. 26.
Ook in dit opstel wordt Pt. steeds aangehaald naar de uitgave van Wallis van 1682.

Vermindert men nu alle getallen zooveel mogelijk met een zelfde getal, dan krijgt men:

6 niets 3 niets 2 niets

en dan behoort de *grootste* som der resten, *zes,* juist bij de octaaf, de beste consonantie, terwijl *drie,* dat meer is dan *twee,* gehecht wordt aan de kwint, die juist een kleiner getal moest hebben dan de kwart: het geheele betoog is dus van onwaarde.

Men kan moeilijk anders doen dan Ptolemaeus gelijk geven, en hem om zijn helderheid en logika bewonderen. Maar had het wiskundig overleg waarlijk zooveel eeuwen noodig om zoover te komen?

## IV.

Ptolemaeus' strijd tegen de wet der veelvoudige en éénmeerige verhoudingen is verwikkeld met een verzet tegen de uitsluiting van de *undeciem.*

Die *undeciem* was blijkbaar langen tijd een twistappel. Aristoxenus aanvaardde ze, op het gehoor af, zonder bezwaar als ware consonantie,[1]) en ook anderen deden zoo, maar al wat zich Pythagoreër voelde, verwierp ze meedoogenloos uit naam der Rede, hoezeer de waarneming ze opdrong.

„Het grootste werk der muziekleer gaat over de consonanties. En dat dezen vijf in getal zijn en niet méér, dat bewijst de rede aan hem, die aan snaren en gaten [= der blaasinstrumenten] die dingen zonder rede door de waarneming wil najagen. Alle consonanties toch nemen hun oorsprong in verhoudingen van getallen, en die verhouding is voor de *kwart* 4 : 3, voor de *kwint* 3 : 2; tweevoudig voor de *octaaf,* voor de *duodeciem* drievoudig, voor de *dubbele octaaf* viervoudig. Als de muziekleeraars (ἁρμονικοὶ) nog daarbij brengen, wat zij de *undeciem* noemen, die buiten de maat gaat, dan moet men dat niet aannemen ter wille van de redelooze waarneming tegen de rede in, die als het ware wet is."

Aldus bij Plutarchus[2]) (omstreeks 100 na Kr.) een spreker, overtuigd Pythagoreër in de muziek blijkbaar, en zich richtend waarschijnlijk vooral tegen Aristoxenus' school, die, zooals wij zagen, de *undeciem* zonder voorbehoud in haar lijst van conso-

---

[1]) Verg. noot 2 op blz. 7.
[2]) *de Ei apud Delphos,* c. 10, § 389.

nanties opnam, en, de Rede der Pythagoreërs versmadend, haar daad uit eigen rede nog wel verdedigen kon.

P t o l e m a e u s is als het ware bemiddelaar tusschen die twee tegenstanders: hij aanvaardt de leiding der Rede, doch wil er geen misbruik van maken; hij aanvaardt de waarneming en daarmee de *undeciem,* en hij acht die handelwijze door de Rede wel degelijk verdedigbaar: de fout ligt niet bij de Rede, doch bij het misbruik er van gemaakt.

Zijn betoog komt, met allerlei besnoeing, op het volgende neer. De *undeciem,* die zoo duidelijk mogelijk een consonantie is, geeft tegen de leer der Pythagoreërs een groot bezwaar. Want de octaaf-consonantie (waar de haar samenstellende tonen in uitwerking van één toon niet verschillen) behoudt, als men een der andere consonanties aan haar verbindt, haar eigen soort ongewijzigd. Het is dus het zelfde of men kwart en kwint aan den laagsten toon der octaaf hecht dan wel aan den hoogsten, daar men toch in beide gevallen eigenlijk de kwart en de kwint zelven hoort; maar dan moeten ook de *undeciem* en de *duodeciem* beiden consonanties zijn, wat dan ook met de ervaring overeenstemt. Door de consonantie-wet der Pythagoreërs nu wordt de *duodeciem* toegelaten, de *undeciem* daarentegen uitgestooten, en dus hapert er iets aan hun leer.

Mede kan men ernstig tegen die leer aanvoeren, dat zij tot de veelvoudige en één-meerige verhoudingen juist alleen die enkele [nl. 2 : 1, 4 : 3, 3 : 2, 3 : 1, 4 : 1] toelaat, en niet bijv. 5 : 4 en 5 : 1, die er toch even goed toe behooren. [1])

In deze fouten (komend bij de vroeger behandelde) ziet P t o l e m a e u s *misbruik* van de Rede, [2]) en hij zelf wil de Rede nu toepassen met een beter gebruik van haar deugd en in overeenstemming met de feiten.

Hij breekt daartoe met de *tetraktys* zoowel als met de wet der veelvoudige en één-meerige verhoudingen, en stelt nu een eigen leer, [3]) die ik in het volgende wederom met besnoeing weergeef.

De tonen (phtongoi) moet men in twee groepen splitsen: de *unisonen* (homophoonoi) en de *consonen* in engeren zin (sym-

---

1) *Harmonika,* I. 6, p. 23—25.
2) *Ib.* I. 6, p. 29.
3) *Ib.* I. 7, p. 29 vlgg.

phoonoi). De *unisonen* zijn de octaaf en de dubbele octaaf, [1]) daar zij bij gelijktijdig aanslaan (met den grondtoon) één klank geven. Dicht daarbij, doch niet ermee samenvallend staan de *consonen,* kwart en kwint, en zij, die daaruit met de unisonen zijn samengesteld. [2])

Dit is een systematiseering naar de *waarneming.* De Rede bevestigt ze, waar deze eischt, dat de termen van een interval naar den graad van onderlinge *gelijkheid* beoordeeld worden. *Volkomen* gelijk nu zijn de *gelijktonige* klanken (*isotonoi,* d.i. twee tonen van de zelfde hoogte, óók door de Pythagoreërs in hun leer opgenomen) aan welke men gelijke getallen geeft. Dáárbij het dichtst staat de twee-voudige verhouding, wijl in haar de grootste term den kleinsten met den kleinsten zelf overtreft. Van de *unisonen* nu is de enkele octaaf de meest éène, zoodat men aan *die* het twee-voud geven moet, en dan aan de dubbele octaaf klaarblijkelijk het *viervoud,* en er kunnen nog wel unisonanties zijn, die met de enkele en de dubbele octaaf gemeten worden.

Het dichtst bij het tweevoud komen de verhoudingen, die dat veelvoud het best en met het kleinste onderlinge verschil in tweeën splitsen, 3 : 2 en 4 : 3, en *die* behooren dus bij de tweeklanken, die de octaaf met het kleinste onderlinge verschil verdeelen, kwint en kwart; dézen zijn dan het eerst *consoon,* en eindelijk volgen (naar een reeds gegeven redeneering) de samenstellingen van de eerste unisonantie met de eerste consonanties, nl. de *undeciem* en de *duodeciem,* bij welke de getallen 8 : 3 en 3 : 1 behooren.

Op déze wijze redeneerend, besluit Ptolemaeus, behoeft men van niemand het verwijt aan te hooren, dat de *undeciem* noch een veelvoudige, noch een één-meerige verhouding heeft, want in mijn leer worden die eischen niet vooropgesteld. [3])

---

[1]) Er werd reeds op gewezen, dat Ptolemaeus in zijn gansche leer zich tot een schaal van *twee* octaven slechts beperkt. Het bestaan van hoogere tonen ontkent hij echter niet.

[2]) Ptolemaeus haalt blijkbaar dooreen den toon in zijn afstand van den grondtoon beschouwd, en de tweeklank door den toon met den grondtoon gemaakt. Zoo is hier *octaaf* zoowel één toon, als de tweeklank met den grondtoon.

[3]) *Νῦν γὰρ οὐδὲν ἡμᾶς οὗτος* [nl. de *λόγος* der undeciem] *οὐκ ὢν ἐπιμόριος ἢ πολλαπλάσιος δυσωπήσει· μηδέν γε τοιοῦτον προυποτιθεμένους.* (Nu toch zal die [undeciemverhouding] ons niets bezwaren, als zijnde noch één-meenig, noch veelvoudig, daar wij niets van dien aard hebben vooropgesteld.)

Hij zegt dat triomfantelijk blijkbaar, met de voldoening van iemand, die een overoud hinderlijk leerstuk overboord werpt, maar hij had wel eenige schuld kunnen erkennen aan Aristoxenus, die al lang geleden had verklaard: verbindingen van consonanties aan de octaaf geven nieuwe consonanties. [1]) Het is waar, Aristoxenus verstaat dien regel als een uitvloeisel uit den *aard* der octaaf (*idion*) zonder méér, en Ptolemaeus brengt er de Rede bij te pas, maar heel even had hij dien voorganger toch wel kunnen noemen.

In allen geval: de wet der veelvoudige en één-meerige verhouding, werd in de oudheid reeds door verscheidenen verworpen, en niet enkel door hen, die niets van fundeering der consonanties met Rede en Wiskunde wilde weten, [2]) doch ook door den wiskunstenaar Ptolemaeus van Alexandrië.

Hij deed dat in naam van het pythagorische Rede-beginsel zelve, doch de lezer zal wellicht meenen, dat ook Ptolemaeus aan de gevaren van het apriorisme nog niet geheel ontkomen was.

*Aanhangsel.*

In een lange aanteekening (p. 290 vlgg.) bij Aristoxenus, § 32, hecht Marquard, de bekwame uitgever en vertaler, naar het schijnt, nog waarde aan de overlevering, die aan Pythagoras zelf een vrij helder inzicht in de fysika der toonwekking bij *snaren* althans schonk. Hij gaat uit van [Porphyrius] (W. III. p. 213 vlgg.), die daar als zegsman Herakleides [3]) noemt, die weer bij Xenokrates leerde.

In mijn opstel, *een foutieve natuurwet,* zette ik uiteen, dat men

---

[1]) *Harmonische Fragmenten,* § 45; uitg. Marquard, p. 64.

[2]) Bewaard is van Aristoxenus (*Harm. Fragm.* uitg. Marquard, § 32, p. 46) de volgende scherpe uitval tegen „voorgangers, die allerlei aan de zaak vreemds invoeren en de waarneming als onnauwkeurig uitsluiten, terwijl zij verstandelijke gronden verzinnen en beweren dat er zekere getal-verhoudingen zijn en onderling verschillende snelheden, wat alles aan de zaak volkomen vreemd is en tegen de verschijnselen in gaat." Klaarblijkelijk is dit tegen de Pythagoreërs gericht, en Aristoxenus neemt dan ook zonder aarzelen op het gehoor af zijn acht consonanties aan.

Niet minder fel is het verzet van Theophrastus in Fragment 89, bewaard bij [Porphyrius], W. III, p. 241—244.

[3]) Marquard spreekt van Herakleides Pontikos, maar [Porphyrius] geeft alleen den naam Herakleides, en het staat niet vast, dat daarmeê de Pontiër bedoeld wordt.

m.i. zelfs aan Archytas zooveel begrip niet gunnen mag, en ik kan dus Marquard niet bijvallen.

Zijn boek is van 1868. Maar nieuwere geleerden, Burnet en Frank, twijfelen ernstig aan Pythagoras als vader van vele vondsten in de klankleer en Erich Frank doet ten deze uitvoerige mededeelingen in zijn *Plato und die sogenannten Pythagoreër* (1923), vooral p. 67—80.

Nog één opmerking. Marquard laat Archytas „nur gleichmässig schwingende Körper einen Klang geben, also was wir periodisch schwingende nennen" (p. 292). Hij geeft geen bewijsplaats, en iets wat er op lijkt, kan ik alleen vinden in het bericht van Theo Smyrnaeus (Hill. p. 61), zeggend, dat voor Archytas en Eudoxus (of hun school) „de snelle beweging *hoog* is, daar zij de lucht aaneengesloten (*syneches*) stoot en sneller prikkelt, enz." [1]) Nu kan men uit dat *syneches* met veel goeden wil iets over de aaneensluiting van *snaar*-slingeringen opdiepen (en Frank doet dat ook), maar Smyrnaeus spreekt hier vlak na, en dus oogenschijnlijk in samenhang met een uitvoerige mededeeling over de toonwekking in *auloi,* zoodat men dat *syneches* ook liever in betrekking tot *blaas*-instrumenten een zin geven moet, en dan zou Archytas (in overeenstemming met het bekende groote fragment) wellicht niets anders bedoelen dan dat bij een korte pijp de *ingeblazen adem,* zich over een kleinere ruimte verdeelend, *meer samengepakt* blijft, meer opeengedrongen, en daardoor met krachtiger vaart door de pijp schrijdend, de buitenlucht met een scherper stoot en sneller zweept. Volgens het bedoelde fragment toch verliest de ingeblazen adem op den weg door de pijp aan kracht, en treedt daarom trager naar buiten, hoe langer de pijp is. Het komt mij voor, dat ook bij de latere acoustici deze gedachte geheerscht heeft.

*Naschrift.*

Door de welwillendheid van Dr. E. J. Dijksterhuis kan de schrijver van dit opstel nog de volgende aanteekeningen aanbieden.

*a.* *πυθμήν.* Deze term, die in de Grieksche wiskunde in meer dan

---

[1]) *οἱ δὲ περὶ Εὔδοξον καὶ 'Αρχύταν τόν λόγον τῶν συμφωνιῶν ἐν ἀριθμοῖς ᾤοντο εἶναι, ὁμολογοῦντες καὶ αὐτοὶ ἐν κινήσεσιν εἶναι τοὺς λόγους καὶ τὴν ταχεῖαν κίνησιν ὀξεῖαν εἶναι ἅτε πλήττουσαν συνεχὲς καὶ ὠκύτερον κεντοῦσαν τὸν ἀέρα, τὴν δὲ βραδεῖαν βαρεῖαν ἅτε νωθεστέραν οὖσαν.*

één beteekenis voorkomt, wordt hier blijkbaar gebruikt in den zelfden zin, als waarin de arithmetici Nicomachus van Gerasa en Theo Smyrnaeus hem kennen. Voor hen is de πυθμήν van alle onderling gelijke getalverhoudingen, die verhouding, waarbij beide getallen zoo klein mogelijk, dus ook (volgens Euclides, VII, 22) onderling ondeelbaar zijn. (Nicomachus. I. 19. 6. ed. R. Hoche, p. 50; Theo Smyrnaeus, ed. E. Hiller, p. 80). De benaming πρῶτοι ἀριθμοὶ leeft nog voort in onze uitdrukking, dat de bedoelde getallen relatief priem zijn (numeri primi inter se). Een andere beteekenis van πυθμήν ontmoet men in de reken-methode van Apollonios van Perga (Pappos, Collectio II, ed. Hultsch, 2—28), waarin het 't aantal tientallen van een veelvoud van 10, het aantal honderdtallen van een veelvoud van 100 enz. aangeeft.

*b. De één in de Grieksche getallen-theorie.*

Het is een eigenaardige trek in de Grieksche getallen-theorie, dat één niet als een getal wordt beschouwd.

Aristoteles (*Metaphysika,* N. 1, 1088 a6) zegt het uitdrukkelijk, met de motiveering, dat een maat niet het gemeten ding is. De één is geen getal, maar het principe en de maat van alle getallen. Zijn opvatting komt ook tot uiting in *Anal. Post.* II. 13, 96 a 36), waar hij zegt, dat een priem getal een getal is, dat door geen enkel getal gemeten wordt. Euclides onderscheidt de eenheid (datgene, op grond waarvan elk ding één genoemd wordt) van het getal, een verzameling eenheden (VII, Def. 1 en 2). Het gemaakte onderscheid is ook in de proposities van Boek VII duidelijk merkbaar, doordat hij meer dan eens een stelling, die zich van een andere stelling slechts daardoor onderscheidt, dat een der daarin optredende getallen de waarde 1 heeft, geheel afzonderlijk formuleert en bewijst. Zie bijv. de groep 5 en 6.

Dezelfde zienswijze ontmoet men bij Nikomachos (*Introd. arithm.* II. 6, 3 en 7, 3, ed. Hoche, pp. 84 en 86).

De eerste poging, om één als getal op te vatten, heeft men bij Chrusippos (3e eeuw v. Kr.), die één definieert als πλῆθος ἕν, wat door Iamblichos (*In Nicomachi Arithm. Introd.* ed. Pistelli, p. 11) als συγκεχυμένως wordt afgekeurd, omdat de eenheid juist het tegenovergestelde van de veelheid is.

*c. Het betoog voor de deugd der kwint boven de kwart.*

Een denkbare verklaring van de geschetste methode der Pythagoreërs kan hierin gelegen zijn, dat zij, voor een consonantie, schooner dan een andere, een eenvoudiger verhouding nu eenmaal aannemend, als een soort van maat voor den eenvoud de som der getallen beschouwden, welke de bedoelde verhouding vormden. De aan die optelling voorafgaande vermindering met één had dan wellicht ten doel om aan de octaaf, de zuiverste consonantie, de eenheid te hechten.

Men moet daarbij natuurlijk afzien van het denkbeeld, dat de toepassing van die vermindering een soort van arithmetische bewerking op de verhouding als zoodanig zou moeten beteekenen. Van soortgelijke redeneeringen kent de Grieksche wiskunde echter wel meer voorbeelden. Men zie bijv. Nikomachus, *Introd. Arithm.* I. 23, 7, waar uit gedurige evenredigheden in eenvoudige termen, door een bewerking op elk dier termen afzonderlijk, nieuwe evenredigheden worden afgeleid.

---

PROSPECTUS

# HANDELSREKENEN

DOOR

A. A. D. BOUWHOF
LEERAAR BOEKHOUDEN M. O.

EN

J. C. LAGERWERFF
LEERAAR AAN EEN HANDELSSCHOOL
TE 's-GRAVENHAGE

DEEL III

TWEEDE DRUK



P. NOORDHOFF N.V. — 1929 — GRONINGEN

Prijs van het complete boek, groot 268 blz., *f* 2,90; geb. *f* 3,30

## VOORBERICHT BIJ DEN EERSTEN DRUK.

Dit derde deel vormt, met de beide voorgaande, een afgerond geheel. Hierin is behandeld, de leerstof aangegeven in het programma voor de eind-examens der erkende Handelsscholen, zooals deze is genoemd onder „handelswetenschappen sub 2e, 3e en 4e".

Allen, die ons bij de bewerking dezer deeltjes met hunne waardevolle inlichtingen hebben ter zijde gestaan, betuigen wij onzen welgemeenden dank.

Het vierde deel zal de nog ontbrekende stof, vereischt voor de practijk-examens, omvatten.

Beëindigen wij dit korte voorwoord met den wensch, dat opbouwende critiek ons ook thans niet zal worden onthouden.

Den Haag, Juni 1926.

DE SCHRIJVERS.

---

## VOORBERICHT BIJ DEN TWEEDEN DRUK.

Bij de bewerking van den tweeden druk hebben wij een dankbaar gebruik gemaakt van de ons verstrekte op- en aanmerkingen. Hierdoor heeft bv. het hoofdstuk „Crediet op korten termijn" nog al eenige wijzigingen ondergaan, wat betreft het promesse-crediet.

Verder is het boek zooveel mogelijk van onjuistheden gezuiverd.

De vraagstukken zijn onveranderd gelaten, behalve daar, waar door de gewijzigde omstandigheden verandering onvermijdelijk was.

Wij hopen, dat door de aangebrachte veranderingen het boek in bruikbaarheid zal hebben gewonnen.

Allen, die ons hun steun verleenden door het maken van bemerkingen, onzen welgemeenden dank.

Den Haag, September 1929.

DE SCHRIJVERS.

# INHOUD.

## HOOFDSTUK III.

### Kostprijs en Verkoopprijs.

Voor den koopman is het een eerste vereischte, nauwkeurig den prijs te kennen; waartegen hij het door hem te verhandelen artikel, inclusief alle kosten, heeft ingekocht. Onbekendheid met den totalen inkoopprijs (kostprijs genaamd) doet hem verkeerde verkoopprijzen berekenen, waarvan wellicht verkoop met verlies het gevolg is. Ter berekening van den kostprijs van een artikel moet de koopman rekening houden met verschillende factoren, die te zamen den kostprijs te voorschijn brengen. Deze kostprijs bestaat uit het inkoopbedrag der goederen, dus het factuur-bedrag, vermeerderd met alle verdere kosten, die het gevolg van den aankoop geweest zijn.

Begrip kostprijs.

Ook de fabrikant dient, om dezelfde reden als de koopman, den kostprijs van het door hem in den handel gebrachte artikel te kennen. De kostprijs van een fabrieks-artikel is in de eerste plaats afhankelijk van den prijs en van de hoeveelheid der voor de vervaardiging benoodigde grondstoffen en van de betaalde arbeidsloonen. Deze uitgaven kunnen voor elk vervaardigd artikel nauwkeurig worden vastgesteld en dragen den naam van „directe kosten".

Directe kosten.

Bovendien worden nog vele uitgaven gedaan, die niet ten laste van een bepaald artikel kunnen worden gebracht, doch die den kostprijs van alle gefabriceerde artikelen *gezamenlijk* verhoogen. Deze laatste uitgaven, bekend onder den naam van „indirecte kosten", worden volgens een daarvoor door den fabrikant aangenomen maatstaf, ten laste gebracht van elk der vervaardigde artikelen afzonderlijk en op deze wijze in den kostprijs van dat artikel opgenomen.

Indirecte kosten.

Voor den koopman zijn kostprijsberekeningen niet alleen noodig ter bepaling van den verkoopprijs, doch ook ter beantwoording van de vraag: „wat kan de maximum-prijs zijn, waartegen het artikel moet kunnen worden ingekocht, om tegen een bekenden verkoopprijs te kunnen leveren?"

Voor den fabrikant geldt hetzelfde voor de kennis van den maximum-inkoopprijs der grondstof, om het daaruit te vervaardigen product tegen een bekenden prijs te kunnen verkoopen.

# DE STELLING VAN STEWART.

I. Deze stelling kan in een anderen dan den gebruikelijken vorm worden gegoten. De nieuwe gedaante heeft twee voordeelen:

*a*) de stelling is dan gemakkelijker te onthouden;

*b*) ze is niet alleen voor een driehoek bruikbaar, maar ook voor een viervlak, vijfcel, enz.

De andere vorm luidt (zie fig. 1):

$$x^2c^2 = a^2p^2 + b^2q^2 + 2\,abpq\cos\gamma.$$

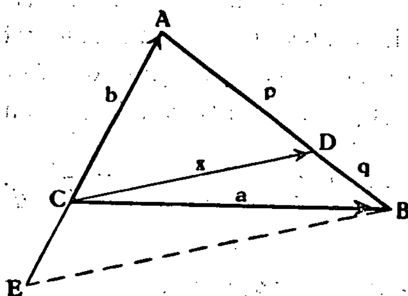


Fig. 1.

Dit is niets anders dan de cosinusregel voor een driehoek, waarvan de zijden zich verhouden als $ap$, $bq$ en $xc$ en waarvan de hoek tegenover de laatste zijde gelijk is aan $180° - \gamma$. Men bewijst de juistheid der betrekking door b.v. BE // CD te trekken. In $\triangle$ BCE is dan:

$$\text{CE} = \frac{bq}{p},\ \text{BE} = \frac{xc}{p},\ \angle\text{BCE} = 180° - \gamma.$$

Het eenvoudigst memoriseert men ze door haar den vector-algebraïschen vorm te geven:

$$p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b} = (p+q)\,\boldsymbol{x}.$$

In de leerboeken over vectoranalyse treft men deze formule steeds aan (b.v. SCHOUTEN: Vectoranalyse blz. 18).

Voor het geval D buiten het lijnsegment AB valt, moet $p$ of $q$ negatief in rekening gebracht worden.

Enkele bijzondere waarden van $p$ en $q$:

Voor $p : q = b : a$ komt er: $x = \frac{2\,ab\cos\frac{1}{2}\gamma}{a+b}$ de bekende deellijn-formule.

Voor $p : q = -\,b^2 : a^2$ komt er: $x = \frac{abc}{a^2 - b^2}$, d.i. de lengte van den buitensymmediaan (raaklijn aan den omgeschreven cirkel).

Voor $p : q = \cot\alpha : \cot\beta$ krijgen we: $q = \frac{c}{\cot\alpha + \cot\beta}$ (hoogtelijn).

II. 't Belang van de nieuwe gedaante schuilt hierin, dat ze ook geldt voor een scheeven vierhoek. Bepalen we nl. op de overstaande zijden CD en FG van zoo'n vierhoek de punten E en H (fig. 2), welke die zijden in de verhouding $p : q$ verdeelen [1]), dan kan EH uitgedrukt worden in CG, DF, $p$, $q$ en den hoek van CG en DF. Brengen we nl. door E (en H) het vlak evenwijdig aan $a$ en $b$ aan, dat CF in I snijdt, dan is $\angle$ EIH de hoek (c.q. 't supplement van den hoek) van CG en DF. $\text{IH} = \frac{ap}{p+q}$ en $\text{EI} = \frac{bq}{p+q}$. Dus:

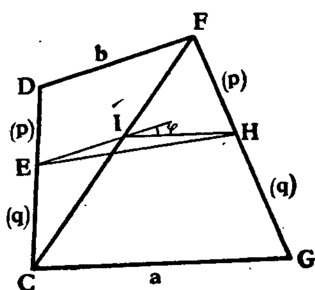


Fig. 2.

$$x^2\,(p+q)^2 = a^2p^2 + b^2q^2 + 2\,abpq\cos\varphi.$$

In dit geval is òok $\varphi = 0^\circ$ van belang. We krijgen dan den bekenden trapeziumregel: $pa + qb = (p+q)\,x$, welke dezelfde gedaante heeft als de vectorformule, gevolg van 't feit, dat de 3 vectoren gelijkgericht zijn.

III. Thans kunnen we de stelling van STEWART voor het viervlak afleiden (fig. 3.) De oppervlakte van $\triangle$ ABE, moet dan uitgedrukt worden o.a. in die van de $\triangle\triangle$ ABC en ABD. Daartoe moeten we de hoogtelijnen CG, DF en EH trekken. Nu

---

[1]) EH is dus een rechte van de hyperboloïde, bepaald door CDFG.

Fig. 3.

is CDFG een scheeve vierhoek en EH daarin een lijn, als sub. II behandeld. (EH ligt nl. in een vlak // CG en DF). Voorts is de hoek van CG en DF de standhoek op AB. Stellen we opp. $ABC = O_1$, opp. $ABD = O_2$ en opp. $ABE = O_3$, dan komt er dus bij vermenigvuldiging met $\frac{1}{4} AB^2$:

$$O_3^2 (p+q)^2 = O_1^2 p^2 + O_2^2 q^2 + 2 O_1 O_2 pq \cos \varphi$$ [2]).

IV. Ook voor de vijfcel en in het algemeen voor ieder simplex blijft de betrekking gelden. Wij denken ons de vijfcel ABCDE orthogonaal geprojecteerd op de zijruimte ABCD. Zij in fig. 4 E′ de projectie van E, dan is de rechte DE′ de projectie van DE en F′ de projectie van een punt F van DE. D, E′ en F′ zijn collineair, omdat de projecteerende lijnen een plat vlak vormen, dat ABCD volgens een rechte lijn snijdt.

De inhoud van viervlak ABC . F moet weer uitgedrukt worden o.a. in die van de viervlakken ABC . D en ABC . E. Daartoe moeten D, E en F op ABC geprojecteerd worden. Daar de projecteerende lijnen op ABC in tegenstelling met die op een zijruimte in 't algemeen verschillende richtingen hebben, is niet direct duidelijk, dat de projecties D″, E″ en F″ collineair zijn. Wel is dit het geval met de projecties D‴, E‴ en F‴ der punten D, E′ en F′ op ABC. Deze punten vallen intusschen samen met D″,


Fig. 4.

[2]) Een vorm, overeenkomende met de gebruikelijke gedaante van de stelling van Stewart, is weer lastiger te onthouden. Hij luidt:

$$O_3^2 (p+q) = O_1^2 p + O_2^2 q - \tfrac{1}{4} a^2 pq (p+q),$$ waarin $AB = a$.

E″ en F″. EE′ en E′E‴ staan nl. beide loodrecht op ABC en hebben verschillende richtingen. Het vlak EE′E‴ staat derhalve absoluut loodrecht op ABC en bevat EE″.

Het vlak EE′E″E‴ heeft met ABC slechts een punt gemeen en dit punt is zoowel E″ als E‴. Zoo is ook F″ ≡ F‴. DEE″D″ is dus weer een scheeve vierhoek, waarin een lijn FF″ is getrokken, zooals bij den sub II behandelden vierhoek. (DD″, EE″ en FF″ liggen in 3 *evenwijdige* absoluut normale vlakken op ABC). Ten slotte is weer de hoek van DD″ en EE″ de standhoek der ruimten ABC . D en ABC . E, daar een vlak, absoluut normaal op ABC de zijruimten ABC . D en ABC . E . snijdt volgens lijnen evenwijdig aan DD″ en EE″.

Op soortgelijke wijze wordt het bewijs voor een simplex in $R_n$ geleverd. Inplaats van ABC krijgen we dan een ruimte $R_{n-2}$, waarop 3 punten van de ribbe, die deze ruimte kruist, geprojecteerd moeten worden. De projecteerende lijnen liggen in drie evenwijdige vlakken, absoluut normaal op de $R_{n-2}$, wier snijlijnen met de zijruimten ($R_{n-1}$) de beenen van den standhoek opleveren.

V. Men zal misschien tegen dezen vorm van de stelling van STEWART aanvoeren, dat hij niet voor behandeling in een tweede klasse van een middelbare school in aanmerking kan komen, omdat er kennis van goniometrische verhoudingen (ook in 't 2de kwadrant!) voor geëischt wordt. Hiertegen kan opgemerkt worden, dat dit bezwaar te ondervangen is door vervroegde behandeling van de gon. verhoudingen, zooals bv. de commissie-Beth heeft voorgesteld. Ook kan men de betrekking als „projectie-stelling' zonder goniometrie opdisschen.

*Weltevreden.* U. H. VAN WIJK.

---

# EEN NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR DE GESCHIEDENIS DER WISKUNDE.

Terwijl de pogingen, in Amerika ondernomen, om tot wederoprichting van de *Bibliotheca Mathematica* te komen, nog niet tot definitief succes hebben geleid, is in Duitschland een belangrijke stap vooruit gedaan op den weg naar een betere organisatie van het historisch onderzoek der wiskunde door de uitgave van de *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, die onder redactie van de mathematici Neugebauer en Toeplitz en van den classicus Stenzel bij Springer zullen verschijnen.

Zooals de naam reeds aanduidt, zal de nieuwe uitgave uit twee verschillende reeksen van publicaties bestaan. Door den naam *Quellen* voorop te stellen, heeft de redactie willen uitdrukken, dat alle ernstige beoefening der historie een voortdurend raadplegen van de oorspronkelijke bronnen vereischt. Zij wil daarom voor alles bronnen toegankelijk maken en wel in een vorm, die eenerzijds voldoet aan alle eischen der moderne philologie, anderzijds echter, door vertaling en commentaar, elken lezer in staat stelt, zich van den inhoud op de hoogte te stellen. Om dat doel te bereiken, streeft zij naar het tot stand brengen van samenwerking tusschen mathematici en philologen, van welke samenwerking de redacteuren Toeplitz en Stenzel zelf een navolgenswaardig voorbeeld leveren. Naast de *Quellen* zullen de *Studien* verschijnen; zij zullen verhandelingen over de geschiedenis der wiskunde bevatten, die meer of minder met het materiaal der gepubliceerde bronnen in verband staan.

In den loop van dit jaar verscheen het eerste Heft van de *Studien*, waarin men zes verhandelingen aantreft, waarvan drie aan de geschiedenis van de Grieksche wiskunde zijn gewijd, twee aan die der Babylonische, een aan die der Aegyptische. De inhoud van deze eerste aflevering lijkt mij belangrijk genoeg, om er in dit tijdschrift de algemeene aandacht voor te vragen.

Het eerste artikel, van de hand van Toeplitz, bevat een belangwekkende poging, om het verband, dat de philosophie van Plato tusschen ideeënleer en wiskunde legt, nader te bepalen. Uit mededeelingen van Aristoteles en zijn commentatoren is bekend, dat Plato de ideeën beschouwde als of althans terugvoerde tot getallen en dat hij deze voortgebracht dacht uit twee principes, het materieele, genaamd het Groot-en-Klein (τὸ μέγα καὶ τὸ μικρὸν) of ook de Onbepaalde Dyade (ἀόριστος δύας) en het formeele, dat als het Eene (τὸ ἕν) wordt aangeduid. Er zijn reeds verschillende pogingen gedaan, om deze theorie, waarvan de inhoud telkens slechts door enkele woorden wordt aangeduid en die reeds voor de commentatoren van Aristoteles een raadsel was, te reconstrueeren; de groote schaarschte en de onduidelijkheid der gegevens maken dit echter tot een moeilijk probleem, dat dan ook, ondanks alle daaraan reeds bestede scherpzinnigheid, nog geenszins opgelost mag heeten.

De schrijver stelt nu, om tot die oplossing te geraken, de hypothese op, dat de Onbepaalde Dyade de „kentheoretische incarnatie" zou zijn van de mathematische verhoudingen (λόγοι), dat dus b.v. de verhouding $\alpha : \beta$ het onbepaalde paar is, dat in verschillende vormen, als verhouding van verschillende paren geheele getallen, van oppervlakken enz. kan optreden. Dat de Onbepaalde Dyade voortbrengend principe der idee-getallen zou zijn, zou dan in dezen zin moeten worden opgevat, dat de verschillende groothedenparen, die in een gegeven verhouding tot elkaar staan, op te vatten zijn als afdrukken van eenzelfden stempel, van eenzelfde cliché, dat ze alle tot een begrip, nl. tot een reden (λόγος) samenvat.

Het is mogelijk, dat door deze hypothese het eeuwenoude probleem van de eigenlijke beteekenis van de theorie der idee-getallen een stap nader tot zijn oplossing is gebracht. Het is mij echter voorloopig niet gelukt, in te zien, dat Toeplitz door zijn verhandeling veel tot de verheldering van de kwestie heeft bijgedragen. Zijn uiteenzetting is namelijk herhaaldelijk gekenmerkt door een bij een mathematicus bevreemdende vaagheid (b.v. reeds in het gebruik van den term „kentheoretische incarnatie", waaraan ik nog geen heldere voorstelling heb kunnen verbinden). En de vergelijking met den stempel moge heel treffend zijn, maar het is mij nog niet gelukt, te begrijpen, of de stempel nu eigenlijk met het formeele principe van het Eene wordt vergeleken (zooals men op grond van het boven

meegedeelde zou meenen) of met het materieele principe, de Onbepaalde Dyade, (wat men weer moet denken, als er sprake is van „den bildsamen Stoff, in den das Prinzip des unbestimmten Paares die einzelnen Paare einstempelt"). Ook houdt de schrijver wel wat heel weinig rekening met het op grond van de beschouwingen van Aristoteles en zijn commentatoren toch wel vaststaande feit, dat de beide principes moeten dienen tot voortbrenging van de getallen Een tot en met Tien. Bij hem ontstaan door de werking van den stempel groothedenparen in oneindig aantal en als men nu het getal wil definieeren als datgene, wat door alle paren, die door denzelfden stempel zijn gevormd, wordt gerepraesenteerd, dan komt men niet tot het begrip van het natuurlijke getal in de eerste decade, maar tot dat van het positieve reëele getal. De verhouding toch, die door een groothedenpaar wordt gerepraesenteerd, kan niet in getallen zijn uitgedrukt (het gaat immers juist om de voortbrenging van de getallen); men moet dus wel aan verhoudingen denken, die zintuigelijk als zoodanig ervaren zijn (dus b.v. aan verhoudingen van lengten van lijnstukken). Maar als men een verhouding van lengten willekeurig geeft, kan men niet weten, dat zij door een geheel of zelfs door een rationaal getal wordt uitgedrukt. Het zou dan echter psychologisch onverklaarbaar zijn, dat de Grieksche wiskunde haar getalbegrip nooit verder zou hebben uitgebreid dan tot het begrip van het natuurlijke getal (*ἀριθμός*). Nu wordt weliswaar door A. E. Taylor en zijn aanhangers tegenwoordig de opvatting verkondigd, dat Plato dat juist wel zou hebben gedaan en dat hij de in zijn tijd bekende quadratische en kubische irrationaliteiten als getallen zou hebben beschouwd. Maar Toeplitz aanvaardt deze opvatting, die op een zeer aanvechtbare interpretatie van een zeer duistere passage uit de *Epinomis* berust, niet. Het is mij uit zijn opstel niet duidelijk geworden, hoe hij dan toch de Onbepaalde Dyade als logos in den meest algemeenen zin van het woord kan opvatten en niettemin volhouden, dat zij getallen voortbrengt.

Ik wil gaarne de mogelijkheid erkennen, dat de kritiek, die ik in het bovenstaande heb meenen te moeten geven, op gemis aan begrip van den gedachtengang van Toeplitz berust; de verantwoordelijkheid voor dat gemis rust dan echter voor een deel op den schrijver; een betoog moet toch in de eerste plaats begrijpbaar zijn.

In de tweede verhandeling levert J. Stenzel, de schrijver van een

in 1924 verschenen en sindsdien niet onbekend gebleven werk *Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles*, een studie *Zur Theorie des Logos bei Aristoteles*, een volledig en goed gedocumenteerd betoog, dat zeker zal kunnen bijdragen tot de reconstructie van de prae-Euclidische wiskunde. Het blijkt nl. hoe langer hoe meer, dat de tallooze, over al zijn werken verspreide en in hun kortheid vaak moeilijk begrijpbare mathematische voorbeelden en toespelingen van den Stagiriet een der voornaamste bronnen voor die reconstructie vormen. De hoofdinhoud van het artikel bestaat in een discussie van een hoofdstuk uit Boek Δ van de Metaphysica, waarin de verschillende beteekenissen van den term „een" worden onderzocht en naar den graad van algemeenheid worden gerangschikt en van een tweede hoofdstuk uit hetzelfde boek, waarin een soortgelijk onderzoek wordt verricht over de relatie „staan tot" (πρὸς τι, wat de oudste en ook bij Euclides nog veel gebruikte term ter aanduiding van een reden is). In de laatst vermelde uiteenzetting meent de schrijver een aanwijzing te zien van een uitbreiding van het prae-Euclidische getalbegrip tot buiten de spheer van wat hij „kommensurabele Zahlen" noemt. Aristoteles spreekt nl. ergens over een verhouding κατὰ μὴ σύμμετρον ἀριθμὸν en in deze uitdrukking μὴ σύμμετρος ἀριθμός wil Stenzel blijkbaar een irrationaal getal ontdekken.

Deze conclusie lijkt echter wel zeer gewaagd. Want we zouden in de eerste plaats moeten weten, wat het beduidt, wanneer even daarvoor gezegd wordt, dat een getal (ἀριθμός) commensurabel (σύμμετρος) is. Het woord σύμμετρος is namelijk zeer bekend als Euclidische term voor „onderling meetbaar", maar het is duidelijk, dat dit woord steeds in het meervoud moet voorkomen. Twee grootheden kunnen onderling meetbaar zijn, maar een grootheid niet. Het heeft dus geen zin, te zeggen, dat een ἀριθμός σύμμετρος, of dit te vertalen door: Denn die Zahl ist Kommensurabel. Vermoedelijk bedoelt Aristoteles, dat een verhouding, die door getallen wordt uitgedrukt, een verhouding van onderling meetbare grootheden is (d.i. de propositie X,6 van Euclides). Als men dat echter aanneemt, is er niets tegen, om in de woorden κατὰ μὴ σύμμετρον ἀριθμόν een slordige uitdrukking te zien voor een verhouding, die niet door getallen kan worden uitgedrukt, omdat van de vergeleken grootheden niet vaststaat, dat ze onderling meetbaar zijn en dan vervalt

alle aanleiding, om bij het woord ἀριθμός aan iets anders te denken dan aan een natuurlijk getal, in overeenstemming met de Euclidische traditie.

In een derde, aan de Grieksche wiskunde gewijde verhandeling van F. Solmsen, getiteld *Plato's Einfluss auf die Bildung der mathematischen Methode,* die een résumé is van een meer uitvoerige beschouwing van de ontwikkeling der mathematische methode tusschen Plato en Archimedes in een boek van denzelfden schrijver over Aristoteles, wordt aannemelijk gemaakt, dat de architectonische waarde van de *Elementen* van Euclides, d.w.z. alle waarde, die dit boek, buiten den mathematischen inhoud van zijn proposities, in de systematiek van zijn opbouw en de methodiek van zijn bewijsvoering bezit, in beginsel te danken is aan den invloed van Plato's wijsbegeerte. Het is in wezen dezelfde stelling, die H. G. Zeuthen in 1917 in een zeer uitvoerige verhandeling in de geschriften van de Deensche Academie der Wetenschappen heeft verdedigd, maar die, daar ze slechts in het Deensch verschenen is, veel minder invloed op de ontwikkeling van de geschiedenis van de Grieksche wiskunde heeft uitgeoefend, dan ze om haar inhoud zou hebben verdiend.

Van den overigen inhoud van de eerste aflevering vermelden we een belangrijk artikel van O. Neugebauer, *Zur Geschichte der Babylonischen Mathematik,* waarin de schrijver de mathematische interpretatie geeft van eenige in 1928 gepubliceerde Sumerische en Babylonische teksten. Hierin blijken tamelijk ingewikkelde problemen over driehoeken en trapezia te worden behandeld, die, modern geformuleerd, zelfs tot vijf, ten deele quadratische vergelijkingen met vijf onbekenden zouden voeren en die op vernuftige wijze worden opgelost.

Samen met W. Struve (Leningrad) behandelt Neugebauer verder de meetkunde van den cirkel bij de Babyloniers op grond van de interpretatie van enkele stukken van de z.g. *Cuneiform Texts* uit het British Museum, die reeds 28 jaar geleden gepubliceerd zijn. De groote moeilijkheid van dergelijke onderzoekingen bestaat hierin, dat men meestal de beteekenis van de gebruikte termen indirect uit den inhoud van de stukken moet afleiden, terwijl men toch eigenlijk de termen zou moeten kennen, om de stukken te kunnen lezen.

Men vindt berekeningen over de oppervlakte van trapezia, over omtrek en oppervlak van den cirkel (die neerkomen op de aanname

$\pi = 3$) en over den inhoud van den korf (afgeknotte kegel), terwijl ten slotte twee opgaven over berekening van koorden in een cirkel worden opgelost, die toestaan, een blik te werpen in de nog duistere geschiedenis van de koordenrekening.

Ten slotte vermelden wij nog een mededeeling van J. J. Perepelkin (Leningrad), waarin een nieuwe interpretatie van de opgave Nr. 62 van den *Papyrus Rhind* wordt gegeven.

Ik hoop, door het bovenstaande een indruk te hebben kunnen geven van den belangrijken inhoud van de eerste aflevering van de *Quellen und Studien*. Aan ieder, die zich voor de geschiedenis van de wiskunde interesseert, kan de raad worden gegeven, met de nieuwe publicatie kennis te maken.

E. J. DIJKSTERHUIS.

# BOEKBESPREKINGEN.

Nieuw Leerboek der Natuurkunde voor Hoogere Burgerscholen met 5-jarigen cursus, Lycea en Gymnasia door W. Reindersma en Dr. T. van Lohuizen. Eerste Deel. J. B. Wolters, Groningen, Den Haag. 1929.

Geheel afziende van de vraag, hoe men in bijzonderheden denkt over de verschillende plannen van de Commissie-Fokker tot reorganisatie van het Natuurkunde-Onderwijs, zal wel iedereen gaarne bereid zijn, één verdienste van de leden dezer commissie onomwonden te erkennen: zij laten het niet bij woorden, maar zij geven zich alle mogelijke moeite, ook door daden hunne bedoelingen te verduidelijken. De tentoonstelling tijdens het Rotterdamsche Congres heeft een duidelijk beeld gegeven van de waarde, die een schoolpracticum onder leiding van een practisch aangelegd docent kan bezitten; thans komt het hierboven aangekondigde leerboek tot in de laatste details uiteenzetten, hoe twee bekende leden der commissie hun eigen physica-onderwijs hebben ingericht; de overeenstemming, die er bestaat tusschen hunne beginselverklaringen in het prospectus der nieuwe uitgave en het rapport der commissie-Fokker rechtvaardigen wel de opvatting, dat we hier met een realiseering van de plannen dier commissie te maken hebben.

Dit verklaart de belangstelling, waarmee in de kringen van het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs naar het boek van de heeren Reindersma en van Lohuizen is uitgezien; het verklaart tevens, waarom dit tijdschrift, dat slechts in bijzondere gevallen van het verschijnen van schoolboeken notitie neemt, het verschijnen van dit boek niet onopgemerkt kan laten voorbijgaan.

Ik heb gaarne de taak op mij genomen, mijn meening over het nieuwe leerboek te zeggen. Die meening zal uit den aard der zaak een voorloopig karakter moeten dragen; immers het thans verschenen eerste deel behandelt van drie hoofdstukken der physica, van de mechanica, de warmteleer en de optica, nog slechts het eerste gedeelte; daardoor moeten alle vragen naar volledigheid en systematiek van behandelingswijze ook voor deze gedeelten onbeantwoord blijven, totdat het geheele werk voltooid zal zijn.

Met de zoo juist reeds aangeroerde splitsing van verschillende onderdeelen der physica in deelen, die reeds in het eerste leerjaar behandeld kunnen worden en andere, die vruchtbaarder in latere

stadia van het onderwijs zullen kunnen worden beoefend, is reeds een eerste, op den voorgrond tredende en in beginsel te waardeeren eigenschap van het werk vermeld: de schrijvers hebben zich niet verplicht gevoeld de traditioneele, door het normaalprogramma vastgelegde, maar didactisch niettemin niet recht verdedigbare rangschikking van de in den loop van het onderwijs ter sprake te brengen onderwerpen te handhaven; ze hebben overwogen, wat ze aan leerlingen eener derde klasse met de meeste kans op succes kunnen voortzetten en ze hebben vanuit dat gezichtspunt de stof gekozen. Over de vraag, of die keuze in allen deele juist is, kan men natuurlijk van meening verschillen; persoonlijk lijkt het mij de vraag, of het wel wenschelijk was, alle bewegingsverschijnselen uit dit eerste deel weg te laten en of b.v. niet de eenparige rechtlijnige en cirkelvormige bewegingen daarin een plaats hadden kunnen vinden; zeer toe te juichen lijkt mij daarentegen, dat de geometrische optica meer naar voren is verplaatst, zoodat ze reeds in dit deel wordt afgehandeld.

Bij de behandeling van de gekozen gebieden hebben de schrijvers zich gehouden aan de door de Commissie-Fokker ontworpen indeeling der mogelijke onderwerpen in zulke, die overal tot het minimum van verplichte kennis zullen moeten worden gerekend en andere, waaruit de leeraar ter aanvulling van zijn onderwijs een keuze kan doen. Het werd hierdoor natuurlijk noodzakelijk, veel meer in het boek op te nemen, dan in den beschikbaren tijd ooit behandeld zal kunnen worden; dit moet bij een billijke beoordeeling van het werk, waarvan het eerste deel door zijn omvang reeds eenigen schrik heeft verbreid, terdege in het oog gehouden worden.

Een tweede algemeen beginsel, dat de schrijvers voortdurend heeft geleid, is dit, dat het doel van het natuurkunde-onderwijs vooral bestaat in het bijeenbrengen van inzicht in de natuurwetenschappelijke methode en dat het onderwijs in wezen denzelfden weg moet gaan, dien de wetenschap volgt: van empirie en experiment tot een zoo mogelijk mathematisch geformuleerde wet met toetsing van de gevolgtrekkingen uit die wet door hernieuwde experimenten. Het komt mij echter voor, dat de schrijvers dit beginsel wel wat al te nadrukkelijk als iets nieuws poneeren; de goede, in gebruik zijnde Nederlandsche leerboeken der natuurkunde nemen het, als ik wel zie, niet minder in acht dan zij het zelf hebben gedaan. Eenzelfde opmerking geldt de uitdrukkelijke beginselverklaring, die zij in het prospectus ten aanzien van de rol der wiskunde in het natuurkunde-onderwijs afleggen; ook hier is men geneigd te vragen, of er eigenlijk wel iemand is, die het tegendeel volhoudt van wat de schrijvers als juist erkennen.

Wel iets nieuws is ongetwijfeld de invoering van de practische oefeningen voor leerlingen als integreerend bestanddeel van het onderwijs. Bij tal van onderwerpen worden practicum-proeven behandeld, die in den gewonen gang van het onderwijs kunnen worden ingelascht. De keuze van die proeven is geschied op grond van een langjarige ervaring, op dit gebied door de schrijvers opgedaan. Wie het practisch werken niet wil invoeren, kan er echter het boek even goed om gebruiken, daar hij de practicum-proeven desgewenscht als lesproeven doen kan. Er is steeds naar gestreefd, om met zoo eenvoudig

mogelijke hulpmiddelen uit te komen; hieraan dankt het boek verschillende, gemakkelijk in elkaar te zetten en zeer bruikbare toestellen; ik vermeld in het bijzonder dat van § 89 ter demonstratie van de wet van Boyle voor spanningen, die zoowel grooter als kleiner mogen zijn dan een atmospheer en die, waarin de z.g. speldenmethode ter behandeling van terugkaatsing en breking van het licht wordt toegepast. Ook overigens valt in het boek op, dat de schrijvers er voortdurend naar hebben gestreefd, bij de keuze van de toestellen rekening te houden met wat de moderne didactische litteratuur op dit gebied vermeldt en zich vóor sleur te hoeden.

Met bijzondere belangstelling heb ik uitgezien naar de wijze, waarop de schrijvers de door hen opgenomen gebieden der mechanica zouden behandelen. Zij hebben zich hierbij tot taak gesteld, een op het experiment gebaseerde inleidende behandeling te geven, die eenerzijds voldoende zou zijn voor wat het physica-onderwijs voorloopig noodig heeft, anderzijds een basis zou kunnen vormen voor voortgezet onderwijs in theoretische mechanica in de vierde en vijfde klasse. Ook hierin wijken zij dus in beginsel niet af van de andere leerboeken; doordat zij zich echter tot de statica beperken, hebben ze de geheele behandeling aanzienlijk kunnen verbreeden en verdiepen, wat o.a. in de grootere uitvoerigheid van de behandeling van de schroefveeren en in het meer uitgebreide gebruik daarvan tot uiting komt.

Het is hier niet zoozeer de plaats, om het standpunt, dat de schrijvers ten aanzien van de didactiek der mechanica innemen, te beoordeelen, dan wel na te gaan, wat zij, op dat standpunt staande, hebben voortgebracht. Daarbij valt het dan wel op, dat menigmaal de definities der ingevoerde begrippen en de formuleeringen der verkregen resultaten te wenschen overlaten. Ten deele is dit volkomen verklaarbaar uit de essentieele moeilijkheden, die nu eenmaal aan de beginselen der mechanica eigen zijn; de schrijvers hebben zich blijkbaar niet zelden gedwongen gevoeld uit didactische overwegingen een onzuivere uitspraak en een niet volkomen correcte zegswijze boven een geheel exact geformuleerde zuivere conclusie te verkiezen. Ten deele echter merkt men ook onvolkomenheden op, die niet op deze wijze verklaarbaar zijn en die men niet alleen wetenschappelijk onjuist moet noemen, maar tevens op didactische gronden als bronnen van misverstand en begripsverwarring ten sterkste moet afkeuren. Ik veroorloof mij, de schrijvers op enkele voorbeelden hiervan te wijzen.

Op blz. 25 leest men: „Onder het aangrijpingspunt van de kracht (werkend op een vast lichaam) verstaan we dat punt, dat alleen in beweging zou geraken, wanneer alle deeltjes van het lichaam los van elkaar waren”. Dit is natuurlijk onjuist; men kan van *het* aangrijpingspunt van een kracht, die op een vast lichaam werkt, in het algemeen niet spreken. En het is een onjuistheid, die een leerling vroeg of laat in moeilijkheden moet brengen. Hij leest b.v. op blz. 55, dat het aangrijpingspunt van de resultante van de gewichten van de deeltjes van een vast lichaam zwaartepunt heet. Dit combineerend met de definitie van aangrijpingspunt moet hij concludeeren, dat als

men het lichaam gesplitst denkt in zijn deeltjes en het geheel onderworpen aan de werking der zwaartekracht, alleen het zwaartepunt valt.

We ontleenen een tweede voorbeeld aan het hoofdstuk Arbeid, waarin we op blz. 47 het volgende lezen:

„Wanneer een kracht, op een lichaam werkend, dit in beweging brengt, terwijl voortdurend weerstand moet worden overwonnen, wordt door die kracht arbeid verricht."

Ik vrees ten zeerste, dat de leerlingen hierdoor den indruk zullen krijgen, dat het overwinnen van een weerstand een noodige voorwaarde is voor het verrichten van arbeid, m.a.w., dat één kracht nooit arbeid kan verrichten. Zij zullen denken, dat de zwaartekracht bij val in vacuo geen arbeid verricht en bij val in een weerstandbiedend medium slechts zooveel, als voldoende is om dien weerstand te overwinnen. De vermelding van een te overwinnen weerstand, die met het begrip arbeid niets te maken heeft, vertroebelt hier de geheele redeneering, ook al zou men willen volhouden, dat er immers niet staat, dat een kracht geen arbeid verricht, als er geen weerstand te overwinnen is.

De schrijvers zijn hier, als ik goed zie, gestruikeld over de essentieele moeilijkheid van het elementaire mechanica-onderwijs, die bestaat in de groote discrepantie tusschen de abstracte begrippen der mechanica en de ervaringen die de dagelijksche empirie en het eenvoudige experiment ons inzake de mechanische verschijnselen verschaffen. Beide leeren ons de verschijnselen van beweging en evenwicht kennen in een hoogst gecompliceerden vorm, waaruit eerst door langdurige en ver doorgevoerde abstraheering en idealiseering de mechanische begrippen en wetten kunnen worden verkregen. De schrijvers voltrekken die abstraheering te snel en reppen van de idealiseering met geen woord: het resultaat bestaat uit een aantal beweringen ,waarvan een eenigszins doordenkende leerling de onjuistheid onvermijdelijk zal moeten inzien. We lichten dit nog toe met een derde en zeer typeerend voorbeeld:

Op blz. 30—31 lezen we: „Wanneer een man trekt aan een kar met een kracht van 50 kg en een tweede trekt juist in tegenovergestelde richting met een kracht van 30 kg, dan zal de kar gaan naar den kant van den sterksten man . . ." Dit is een wonderlijke bewering; niet zoozeer, omdat men toch niet weten kan, wie van die twee mannen de sterkste is, maar vooral omdat ze zoo volmaakt met de empirie in strijd is. Wat zullen de schrijvers zeggen, als hun leerlingen, die ze immers opvoeden tot eigen waarneming en practisch onderzoek, ook deze bewering op de proef gaan stellen en wanneer ze den volgende dag komen vertellen, dat een sleeperswagen, waarop ze het hebben geprobeerd, toch niet in beweging kwam? Ze zullen, als ervaren docenten, ongetwijfeld van de situtatie partij weten te trekken tot ontwikkeling van het begrip der wrijving, maar ondertusschen heeft het boek dan toch maar iets beweerd, dat niet waar bleek te zijn en hebben de schrijvers weer eens aangetoond, dat zij den afstand tusschen de ervaringen der realiteit en de begrippen der mechanica sterk onderschatten. Want men meene niet, de boven gemaakte opmerkingen te kunnen ontzenuwen met de bewering, dat iedereen

natuurlijk wel begrijpt, dat er een wagen bedoeld is zonder wrijving in de assen, staande op een volkomen glad plat vlak enz. Want als men dat volhoudt, geeft men toe, dat het geen echte wagen mag zijn in de echte buitenwereld, m.a.w., dat het beroep op de eenvoudige ervaring, waarop de schrijvers hun redeneering baseeren, slechts een schijngrond is, omdat men nu eenmaal over ideale wagens niets ervaren kan.

Juist in eenvoudige zinnetjes als het boven geciteerde onthult zich de principieele fout, die de schrijvers m. i. in hun opzet der mechanica maken. Inplaats van er bij voortduring den nadruk op te leggen, dat de mechanische begrippenwereld niet onmiddellijk in de dagelijksche ervaring is gerealiseerd, dat dus b.v. een kar, die door een man wordt voortgeduwd, juist geen voorbeeld is voor een vast lichaam, waarop één kracht werkt, meenen zij, onmiddellijk den stap van de physische realiteit tot de mechanische theorie te kunnen doen, waardoor zij òf met die realiteit òf met die theorie in strijd komen.

Ik geef het bovenstaande slechts als voorbeeld van de onvolkomenheden, die het boek hier en daar ontsieren. Hun voorkomen is zeer te betreuren; want er is in het boek van de heeren Reindersma en van Lohuizen veel te waardeeren; ze hebben zich geen moeite gespaard, om een degelijk leerboek te schrijven, dat alle eischen, die de moderne didactiek aan het physica-onderwijs stelt, zou kunnen bevredigen. Het resultaat zou echter zooveel beter hebben kunnen zijn, indien zij wat kritischer waren geweest juist ten aanzien van de formuleering van de fundamenteele begrippen en ten opzichte van de wijze van uitdrukking.

Wat de keuze der behandelde onderwerpen betreft, meen ik het te moeten betreuren, dat van het in de Mechanica ingevoerde begrip arbeid niet reeds in de warmteleer van dit eerste deel gebruik wordt gemaakt. Men kan dit doen, zonder de kinetische moleculairtheorie in te voeren, door aan het verschijnsel van het verschil van de soortelijke warmten van een gas bij constante spanning en constant volume de oorspronkelijke beschouwingen van Robert Mayer over aequivalentie (niet identiteit) van warmte en energie vast te knoopen. Dit geeft o.a. het voordeel, dat men een inzicht kan geven in het genoemde verschil en in de eigenlijke energetische beteekenis van de gasconstante; het wordt hierdoor ook eerst mogelijk, deze constante in bepaalde eenheden uit te drukken en dus te benoemen.

Om het benoemen van physische grootheden bekommeren de schrijvers zich echter niet hard, evenmin als andere leerboeken der physica dat doen. Toch zou het zeer wenschelijk zijn, indien van den aanvang af op dit punt grootere correctheid werd betracht, indien men b.v. consequent een soortelijk gewicht in gram/cm$^3$, een soortelijke warmte in cal./gramgraad, een waterwaarde in cal./graad, een smeltingswarmte in cal./gram, een druk in cm kwik/cm$^2$ of in gram/cm$^2$ uitdrukte. Formeele correctheid is zulk een steun voor juistheid in denken en rekenen. En de slordigheid, die op dit punt in de maatschappij heerscht, waar men snelheden gaarne in km uitdrukt en de Watt voor een energiemaat aanziet (zie de radiorubriek in de dagbladen), maakt het de school tot plicht, het opgroeiend geslacht

van den aanvang af te wennen aan het denkbeeld, dat dimensieverschil van physische grootheden in de notatie tot uiting moet komen.

Daar het mij te ver zou voeren, het geheele boek op de boven gevolgde wijze te bespreken, beperk ik mij tot enkele opmerkingen over het hoofdstuk Optica. Hier is zeer te waardeeren, dat er voortdurend naar is gestreefd, de leerlingen de werking van spiegels en lenzen te doen gevoelen, door haar in aanschouwelijke taal te omschrijven. Daarentegen laat de mathematische behandeling van dit onderwerp nogal iets te wenschen over. Zoo wordt de formule voor de beeldvorming door een hollen spiegel slechts afgeleid voor het geval, dat voorwerp en beeld beide reëel zijn; bij den bollen spiegel wordt voor het eerst gesproken van het toekennen van een teeken aan afstanden tot den spiegel, wat ten onrechte als een noodzaak wordt opgevat; het begrip van het virtueele voorwerp wordt telkens zeer onvolledig behandeld; een behoorlijke definitie hiervan ontbreekt zelfs. De bewering, dat de vergrooting de verhouding van beelds- en voorwerpsafstand is, zal aanleiding geven tot de bekende verwarring van de definitie van en de uitdrukking voor de vergrooting; de vergrooting is niet de genoemde verhouding, maar zij is daaraan gelijk. Daar de schrijvers aan de vergrooting geen teeken toekennen, is hun bewering bovendien niet geheel juist.

De in een bespreking onvermijdelijke vermelding van details mag echter ten slotte niet de aandacht van de hoofdzaak afleiden. Als slotconclusie van de lectuur van het werk van de heeren Reindersma en van Lohuizen zou ik daarom willen zeggen, dat, voorzoover men na kennis te hebben genomen van het eerste deel kan oordeelen, hun boek een respectabele didactische daad beduidt, dat het zeer bruikbaar is voor hoofdzakelijk practisch aangelegde docenten, dat ieder, die physica doceert, het menigmaal met vrucht zal kunnen raadplegen (ik spreek hier uit ervaring), maar dat het, wat nauwkeurigheid van afleiding en formuleering betreft, nog voor veel verbetering vatbaar is.

E. J. Dijksterhuis.

H. J. van Veen, Systematische verzameling van opgaven over analytische meetkunde (met antwoorden). Groningen, P. Noordhoff, 1929. 70 en 35 bldz., *f* 2.60.

Deze verzameling bevat vraagstukken over analytische meetkunde van het platte vlak tot en met de kegelsneden en over de analytische meetkunde der ruimte tot en met de tweede-graadsoppervlakken. Veel vraagstukken over dit laatste onderwerp zal men er niet in vinden; de vraagstukken over tweede-graadsoppervlakken betreffen slechts het onderzoek van kwadratische vergelijkingen en de poolverwantschap t.o.v. kwadratische oppervlakken. In eene verzameling herhalingsvraagstukken vindt men de opgaven der propaedeutische examens der Technische Hoogeschool. De verzameling is dan ook samengesteld voor de Delftsche studenten, maar vermoedelijk zullen ook anderen, die zich door het oplossen van niet te moeilijke vraagstukken in de beginselen der analytische meetkunde willen oefenen, er van kunnen profiteeren.

J. H. S.

Dr. Hk. de Vries, Beknopte Differentiaal- en Integraalrekening. Groningen, P. Noordhoff, 1929. 562 bldz., geb. *f* 15.—.

Dit werk is eene verkorte uitgave van het Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening van denzelfden schrijver, het is in overeenstemming gebracht met de behoeften van hen, die de differentiaal- en integraalrekening moet gebruiken als technisch hulpmiddel voor andere vakken: natuurkunde, scheikunde, physiologie, e. d. Daardoor is meer dan in het uitgebreide werk de nadruk gelegd op de resultaten, de rekenmethoden, minder op strengheid van afleiding, hetgeen niet wegneemt, dat begrippen als continuiteit en differentieerbaarheid besproken worden. Onderwerpen uit de theorie der functies eener complexe veranderlijke, elliptische integralen en elliptische functies, en eene inleiding tot de variatie-rekening, zijn vervallen. Daartegenover staat, dat op verschillende plaatsen oefeningen zijn ingelascht; aan het slot vindt men vraagstukken van de propaedeutische examens der technische hoogeschool. De voor den practicus zoo belangrijke differentiaalvergelijkingen zijn natuurlijk behouden gebleven.

De titels der hoofdstukken zijn: 1. Grondslagen der differentiaalrekening. 2. De afgeleiden der elementaire functies. 3. Hoogere afgeleiden en differentialen. Implicite funcites. Partieele afgeleiden. Het invoeren van nieuwe veranderlijken. 4. Grondslagen der integraalrekening. 5. Het integreeren van rationale en irrationale breuken. 6. Bepaalde integralen en eenvoudige meetkundige toepassingen der Differentiaal- en Integraalrekening. 7. De reeksen van Taylor en Mac-Laurin. 8. Toepassing der Differentiaal- en Integraalrekening op de theorie der vlakke krommen. 9. Kromming van vlakke krommen, Kromtestraal, enz. 10. Functies van meer dan één veranderlijke. 11. Meervoudige integralen. 12. Differentiaalvergelijkingen. Elementaire integratiemethoden. 13. De lineaire vergelijking van de $n^e$ orde. 14. Totale, en simultane gewone differentiaalvergelijkingen. 15. Partieele differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. 16. Partieele differentiaalvergelijkingen van de tweede orde.

Het mag als van groote bekendheid beschouwd worden, hoe Prof. De Vries de kunst verstaat, om op steeds duidelijke en gemakkelijk leesbare, vaak zelfs amusante wijze, te formuleeren wat hij te zeggen heeft. Deze eigenschap maakt ook van dit boek de lezing tot een genoegen. Het zal zich ongetwijfeld veler belangstelling verwerven.

J. H. S.

Dr. M. van Haaften, Leerboek der Intrestrekening. Groningen, P. Noordhoff, 1929. XII + 644 bladz. Prijs ingen. *f* 13.50, geb. *f* 15.—.

Door velen zal zeker met belangstelling zijn uitgezien naar de verschijning van dit leerboek. De schrijver toch is door zijn talrijke publicaties over intrestrekening in verschillende tijdschriften, alsmede door enkele boeken over hetzelfde onderwerp bekend geworden als iemand, die een grondige en diepgaande kennis van dezen tak van

wetenschap bezit. Gedeeltelijk is het leerboek dan ook te beschouwen als een bewerking van schrijver's publicaties over intrestrekening en veel van wat tot nu toe over verschillende tijdschriftartikelen verspreid was, is thans in dit boek tot een samenhangend geheel bijeengevoegd. Er wordt echter bij den lezer niet de minste kennis van de intrestrekening ondersteld, van den grond af wordt alles behandeld en in de eerste drie hoofdstukken worden de grondbegrippen kapitaal, intrest, disconto, percentage, rentevoet enz., uitvoerig besproken. Wel neemt de schrijver aan, dat de lezer eenigszins op de hoogte is van de rekenkunde en de lagere algebra, terwijl voor het kunnen begrijpen van hoofdstuk XXIV over continue intrestrekening bovendien eenige kennis van de beginselen der differentiaal- en integraalrekening wordt vereischt. Het vierde hoofdstuk van zijn boek heeft de schrijver gewijd aan de bespreking van eenige zuiver wiskundige onderwerpen als sommatie van reeksen en intèrpolatie, zoowel de lineaire als die met tweede en hoogere verschillen, omdat deze wiskundige bewerkingen in de intrestrekening een rol spelen en gewoonlijk in de elementaire leerboeken der algebra niet besproken worden. Ook komt in hetzelfde hoofdstuk de verkorte vermenigvuldiging en deeling ter sprake; de wijze, waarop deze verkorte bewerkingen kunnen worden uitgevoerd, wordt aangegeven en aan de hand van enkele voorbeelden toegelicht. Met dit vierde hoofdstuk wordt de eerste afdeeling van het boek besloten.

De tweede afdeeling handelt over de gewone enkelvoudige intrest- en discontorekening, zooals die o. a. bij renteberekening in rekening-courant en bij het disconteeren van wissels wordt toegepast.

De derde afdeeling vormt de kern van het boek en bevat de beginselen der samengestelde intrestrekening. Hierin worden formules afgeleid voor de slotwaarde en de aanvangswaarde van de eenheid van kapitaal en voor de aanvangs- en slotwaarden zoowel van gelijkblijvende als van veranderende annuïteiten. Bijzonderen nadruk legt de schrijver op wat door hem het dualiteitsbeginsel wordt genoemd. Dit wordt op blz. 129 als volgt geformuleerd: „Dit dualiteitsbeginsel komt hierop neer, dat definities en formules uit de intrestrekening, mits op de behoorlijke wijze ingekleed, geldig blijven, wanneer men de richting van den tijd omkeert, dat is, wanneer men alle woorden, welke met den tijd verband houden, in hun tegengestelde beteekenis neemt. Daarbij wordt eerste vervangen door laatste, voor door na, aanvang door slot, en, in overeenstemming met dit laatste, de letter *a* door de letter *s*, dat wil nu in onze notatie zeggen A door S, *a* door *s* en a door s. Hierbij moeten dan ook, gelijk naderhand zal blijken *i* en —*d* als elkanders tegengestelden worden beschouwd." Het hoofdstuk XIII is geheel aan het dualiteitsbeginsel en zijn toepassingen gewijd en bevat aan het eind een overzicht van de grondformules. Om het dualiteitsbeginsel in de formules door te voeren is een wijziging en uitbreiding noodig van de zoogenaamde Universeele Notatie, zooals die door het Tweede Internationale Congres van Actuarissen in 1898 te Londen is aangenomen. In § 208 wordt deze wijziging en aanvulling breedvoerig uiteengezet, terwijl in § 209 een overzicht wordt gegeven van de door den schrijver gebezigde notatie. Een woord van lof mag den schrijver niet onthouden worden

voor de groote duidelijkheid waarmee hij hier de grondslagen van de samengestelde intrestrekening uiteenzet. Door de gebezigde notatie en de toepassing van het dualiteitsbeginsel is er systeem gebracht in de formules der samengestelde intrestrekening en zijn deze zeer overzichtelijk geworden.

In de vierde afdeeling komen de toepassingen der samengestelde intrestrekening ter sprake. Achtereenvolgens worden behandeld: schulddelging door middel van annuïteiten, bijzondere leeningen, koersbepaling, koersbepaling bij bijzondere leeningen, spaarverzekering. Een bijzonder gelukkige gedachte acht ik het van den schrijver de spaarverzekering zoo uitvoerig te behandelen. Het hoofdstuk over spaarverzekering vormt m. i. een uitstekende inleiding tot de studie der levensverzekeringswiskunde. Verschillende grondbegrippen van de levensverzekeringswiskunde, als netto, bruto en reserve koopsommen en jaarpremiën, netto reserve volgens de prospectieve en de retrospectieve methode, gezillmerde reserve, premievrije polis, afkoopwaarde, komen hier ter sprake. De spaarverzekering kan toch beschouwd worden als een gemengde verzekering, waarbij de sterftekans voor iederen leeftijd gelijk nul wordt gesteld.

De vijfde afdeeling heeft betrekking op de samengestelde intrestrekening bij gebroken tijden. Eerst wordt de theorie behandeld en daarna de toepassingen op schulddelging door middel van annuïteiten, koersbepaling en spaarverzekering. Ook is een hoofdstuk gewijd aan de continue intrestrekening.

Verschillende op zich zelf staande onderwerpen worden behandeld in de zesde en tevens laatste afdeeling van het boek. Een belangrijk hoofdstuk is het laatste, dat over „tafelkunde" handelt. De schrijver is terecht van oordeel, dat de intrestrekening voornamelijk tot doel heeft na te gaan, hoe men aan de hand van de beschikbare rentetafels intrestkwesties het snelst en met de minste kans op fouten tot oplossing brengt, voorts in welke richting uitbreiding van die tafels gewenscht is, en hoe de berekening daarvan het best kan geschieden. In dit hoofdstuk wordt nu een overzicht gegeven van verschillende soorten van algemeene rekentafels, zooals logarithmentafels, vermenigvuldigingstafels enz. en van rentetafels. Verder heeft de schrijver aan zijn werk nog een vijftiental tafels toegevoegd. Een zeer uitvoerig register, dat het boek besluit, verhoogt de bruikbaarheid er van voor hen, die het voor een of andere kwestie willen raadplegen.

Zooals men aan bovenstaande korte opsomming van den inhoud kan zien, heeft men hier te doen met een werk, dat onmisbaar is voor elk, die de intrestrekening moet bestudeeren. Daar de schrijver op gelukkige wijze het midden heeft weten te bewaren tusschen een te theoretische en een te practische behandeling van het onderwerp is zijn werk zoowel voor theoretici als voor practici bruikbaar. Het boek is zeer helder geschreven in een aangenaam leesbaren stijl. Door de groote zorgvuldigheid, waarmee de schrijver zich van zijn taak gekweten heeft en de geleidelijke wijze, waarop hij de intrestrekening opbouwt, is zijn boek ook uiterst geschikt voor zelfstudie. Met warmte kan ik het dan ook allen, die om welke reden ook, zich met de studie der intrestrekening moeten bezighouden, aanbevelen.

W. C. Post.

# IETS OVER HET GEBRUIK VAN HET WOORD „ONEINDIG" BIJ HET WISKUNDE-ONDERWIJS OP ONZE MIDDELBARE SCHOLEN.

---

Het komt ons voor dat men aangaande dit gebruik drie standpunten kan innemen:

I. Men kan, teneinde deeling door nul mogelijk te maken, een z.g. oneindig groot getal invoeren.

II. Men kan elk begrip oneindig groot vermijden.

III. Zonder aan oneindig de beteekenis van een getal te geven, kan men dit woord toch gebruiken, om eenvoudige spreekwijzen mogelijk te maken.

Beschouwen we deze opvattingen nader:

I. Dit standpunt brengt o. i. vele en groote moeilijkheden. Moet men één getal oneindig invoeren of meerdere (en dan onbepaald veel)? Neemt men er één dan krijgt dit o. a. de merkwaardige eigenschap dat het bij deeling door of vermindering met zichzelf elk getal kan opleveren. Het alternatief (invoering van meerdere getallen oneindig) heeft eveneens eigenaardige bezwaren. Alleen reeds de vraag of men dan ook verschillende teekens moet gaan gebruiken [1]) is al genoeg om iemand duizelig te maken.

Hoe men 't ook inricht, een dergelijke uitbreiding van het getalbegrip stelt enorme eischen aan onze leerlingen (om van onszelf maar te zwijgen), want behalve het vreemde en ietwat griezelige karakter van het heele geval zijn limietbeschouwingen hier schering en inslag. Reeds in de tweede klasse moet men er mee beginnen, zoodra vergelijkingen met de onbekende in den noemer ter sprake komen. Ten slotte lijkt ons het nut dezer zaken, zoowel voor de geestelijke als de practische ontwikkeling der leerlingen twijfelachtig en naar onze meening kan men op deze wijze dan ook niet veel anders dan verwarring bereiken.

---

[1]) Op zeer bescheiden schaal pleegt men dit te doen door te onderscheiden tusschen $+\infty$ en $-\infty$.

II. Men vermijdt het oneindige geheel. Deeling door nul wordt nooit toegelaten, heeft geen beteekenis. $\frac{1}{0}$, tg 90° enz. zijn zinledig. Vergelijkingen als $\frac{2}{x} = 0$ en $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$ zijn valsch. Formules als $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$ zijn wel algemeen, maar gelden vanzelfsprekend niet voor hoeken die geen tangens of cotangens hebben zooals 0°, 90° enz.

Men krijgt o. i. op deze wijze vrij groote vereenvoudiging, terwijl de bereikbare strengheid waarschijnlijk toeneemt.

III. Dit standpunt is principiëel hetzelfde als het sub II genoemde. Alleen laat men uitdrukkingen als tg 90° $= \infty$ toe, hoewel een hoek van 90° geen tangens heeft en $\infty$ geen getal is. Het is dan niets anders dan een korte manier om te zeggen dat als een veranderlijke scherpe hoek onbepaald tot 90° nadert, de bijbehoorende tangenten stijgen boven elk getal. Hoewel nul voor het grondtal 10 geen logarithme heeft, kan men toch wel de uitdrukking ${}^{10}\log 0 = -\infty$ gebruiken, maar men legge er den nadruk op dat dit niets anders beteekent dan dat ${}^{10}\log a$ daalt onder elk getal als men $a$ van de positieve zijde tot nul laat convergeeren. Zoo kan men blijven zeggen $\frac{1}{0} = \infty$, echter met de goed vastgelegde beteekenis dat $\frac{1}{a}$ boven elk getal stijgt als men $a$ van den positieven kant tot nul laat convergeeren, enz.

Het derde standpunt komt ons het meest aantrekkelijk voor. Mits men herhaaldelijk op deze zaken terugkomt, kunnen zij ook voor middelmatige leerlingen duidelijk worden. Wanneer zij goed weten dat zij niet door nul mogen deelen en niet mogen trachten met oneindige getallen te rekenen, zal dit vele fouten voorkomen.

In al deze dingen zit een sterk subjectief element. Eenheid van opvatting zal er nog wel in lang niet komen, is misschien ook niet wenschelijk. Wat we echter wel hopen is, dat deze kwesties vermeden worden bij examen-opgaven en we denken daarbij in de eerste plaats aan de goniometrische vergelijkingen, die weer ingevoerd zijn voor het eindexamen der H.B.S. B.[1]).

---

[1]) Welke invoering weer is opgeschort.

In 1912 werd gevraagd op te lossen de vergelijking

$$\frac{\cos x(\sin x + \cos x)}{\operatorname{cotg}(45^\circ - x)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 2\sin^2(45^\circ - x)$$

Bij een bepaalde behandeling komt men hier tot de oplossing

$$x = 90^\circ + n \,.\, 180^\circ$$

$$\text{en } x = 45^\circ + n \,.\, 180^\circ.$$

We nemen aan dat men zich gedurende de oplossing van eventueele invoering van wortels niets heeft aangetrokken en dus achteraf wil toetsen. Neemt men een der standpunten II of III in, dan blijkt geen der wortels te voldoen en men verklaart de vergegelijking voor valsch. Huldigt men echter de opvatting I dan moet van de leerlingen verwacht worden, dat zij b. v. de gelijkheid

$$\frac{0\,.\,(1 + 0)}{-1} = \frac{1 - \infty^2}{1 + \infty^2} + 1$$

kunnen goedpraten.

Mogen de autoriteiten zorgen dat dergelijke kwesties niet meer voorkomen. Het feit dat men zich tot zekere uiterlijk eenvoudige typen van vergelijkingen zal bepalen (zie weekblad no. 19, pag. 314) is daarvoor nog geen garantie.

B. P. H.
J. H. S.

# DE ONTWIKKELINGSGANG DER WISKUNDE IN DE Vde EEUW VOOR CHR.

---

Het onderhavige artikel is een Nederlandsche bewerking van hoofdstuk IV uit „Die Entwicklung der Mathematik im V. Jahrhundert" (p. 24—28) van J. L. Heiberg's beknopt, doch veel omvattend werkje „Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin im klassischen Altertum" (Teubner, Leipzig. Tweede druk 1920; pp. 98 + 2 fig.).

Vooreerst een kort levensbericht over Heiberg. Johann Ludwig Heiberg werd geboren te Aalborg (Jutland) den 27 November 1854. Hij promoveerde in 1879 aan de Hoogeschool van Kopenhagen tot doctor in de philologie. In 1884 was hij reeds rector van een gymnasium en van 1896 af hoogleeraar in de klassieke philologie en archeologie aan de Universiteit te Kopenhagen.

Hij leefde daar in een wetenschappelijken kring geheel verschillend van hetgeen wij gewoonlijk een taalgeleerd midden noemen. Immers zijn intellectueele kring bevatte wiskundigen van den eersten rang. Vooral zijn omgang met den geleerden Zeuthen (1839—1920) hoogleeraar te Kopenhagen, maakte hem voor zijn leven tot een hellenist van de geschiedenis der wetenschappen. Zeuthen was tot aan zijn dood, 5 Januari 1920, de hooggeachte medewerker, als mathematicus van Heiberg.

Uit hun innige samenwerking groeide een nieuwe twijg der philologie, de mathematische philologie. [1]

Onder de knappe leiding van beide geleerden werden de

---

1) Heiberg (J. L.): Philolog. Studien zu griech. Mathematikern. Leipzig, 1880, pp. 43.
Müller (J.): Histor.-etymolog. Studiën über mathemat. Terminologie. Berlijn 1887, pp. 32.

„Mémoires Scientifiques [2]) van Paul Tannery (1843—1904), een der heerlijkste werken over de geschiedenis der wiskunde, uitgegeven.

Tevens wijdde Heiberg zich aan de studie van de werken der grootmeesters der Alexandrijnsche school. Dit was zijn voornaamste levenstaak.

Zijn werken waren op dat gebied:

„Quaestiones Archimedae scripsit J. L. Heiberg. Inest de Arenae numero libellus" Kopenhagen, 1879.

„Philologische Studien zu griechischen Mathematikern" Leipzig, 1880, pp. 43.

J. L. Heiberg: „Literargeschichtliche Studien über Euklid." Leipzig 1882.

„Euclidis opera omnia":

Elementa (vol. I—V), J. L. Heiberg;

Data (vol. VI), H. Menge;

Optica (vol. VII), J. L. Heiberg;

Phaenomena et scripta musica (vol. VIII), H. Menge;

Fragmenta collegit et disposuit (vol. VII), J. L. Heiberg;

Supplementum: Anaritii elementorum Euclidis commentarii, M. Curtze;

[vol. I, 1883; vol. II, 1884; vol. IV, 1885; vol. III, 1886; vol. V, 1888; vol. VII, 1895; vol. VI, 1896; Supplementum...., 1899; vol. VIII, 1916].

„Apollonii Pergaei quae Graece exstant, cum commentariis antiquis" 1891—93, 3 vol.

„Sereni Antinoensis opuscula" 1896.

„Ptolemaei, Cl., opera quae exstant omnia":

vol. I. „Syntaxis mathematica"; pars I, II; (1898—1903)

vol. II. „Opera astronomica minora". 1907.

---

[2]) „Mémoires Scientifiques de Paul Tannery", édités par Dr. J. L. Heiberg et Dr. H. G. Zeuthen; vol. in-8.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Deel | I: | Sciences exactes dans l'antiquité. | (1876—1884), 1912. |
| „ | II: | Sciences exactes dans l'antiquité. | (1883—1898), 1912. |
| „ | III: | Sciences exactes dans l'antiquité. | (1889—1913), 1915. |
| „ | IV: | Sciences exactes chez les Byzantins. | (1884—1919), 1920. |
| „ | V: | Sciences exactes au Moyen Age: | (1887—1921), 1922. |
| „ | VI: | Sciences modernes: | (1883—1904), édité par Gino Loria, 1926. |
| „ | VII: | Philosophie ancienne: | (1880—1894), 1925. |
| „ | VIII | is ter perse. | |

„Archimedis opera omnia, cum commentariis Eutocii"; iterum editit J. L. Heiberg, (vol. I, 1910; vol. II, 1913; vol. III, 1915).

„Eine neue Schrift des Archimedes" van J. L. Heiberg en H. G. Zeuthen. Leipzig, 1907.

„Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia". (Grieksch en Duitsch):

vol. I. „Pneumatica et automata", W. Schmidt, (1899).

Suppl.: „Die Geschichte der Textüberlieferung", W. Schmidt, (1899).

vol. II.: fasc. I.: „Mechanica et catoptrica". L. Nix en W. Schmidt, (1900).

vol. III.: „Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica." H. Schoene (1903).

vol. IV.: „Heronis definitiones cum variis collectionibus Heronis quae ferunter geometrica." G. Schmidt en J. L. Heiberg (1912).

vol. V.: „Heronis quae ferunter stereometrica et de mensuris". G. Schmidt en J. L. Heiberg (1914).

„Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften im Altertum" J. L. Heiberg, München, 1925.

De resultante zijner historische studiën over het hellenische tijdvak ligt in de hiervoor genoemde werken, die een huldemonument zijn voor de mathematische archeologie.

Laten wij hier het woord aan E. Picard en F. Enriques;

„Zeuthen [1]) eut l'heureuse fortune d'avoir pour collègue à

---

[1]) Wijlen hoogleeraar Hieronymus Georg Zeuthen werd geboren te Grimstrup (Jutland) den 15 Februari 1839. Hij studeerde te Parijs de hoogere meetkunde en onderging er den invloed van Chasles. Hij promoveerde tot doctor in 1865 aan de Universiteit van Kopenhagen. Vanaf 1871 was hij er als hoogleeraar werkzaam, en medewerker aan het „Tidsschrift for Mathematik". Den 31 October 1884 legde hij aan de Academie van Kopenhagen een dissertatie voor: „Sur la théorie des sections coniques dans l'antiquité", die haar eigen stempel draagt. Zijn wiskundige verhandelingen over de krommen van hoogere orde, over de projectieve meetkunde en over transformaties getuigen van een groote begaafdheid en een heldere uiteenzetting.

Bovendien schreef Zeuthen: „Foreleasning over mathematikens historie Oldtid og middelalder" (1893); „Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter" (Deutsch von R. Fischer—Benzon). Kopenhagen 1896. [Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge. Edition française revue et corrigée par l'auteur, traduite par Jean Mascart, Docteur ês sciences. Paris, Gauthiers—Villars, 1902, [XV] + 296 p.]; „Geschichte der Mathematik im 16. und 17.

l'Université de Copenhaque l'illustre philologue Heiberg, avec lequel il collabora dans plusieurs circonstances. On se rappelle notamment avec quel intérêt fut accueillie la découverte faite par M. Heiberg à Constantinople dans le „Metochion" du cloître du Saint-Tombeau de Jérusalem, d'un manuscrit dont l'écriture qui date du treizième siècle, recouvrait plusieurs manuscrits d'Archimède en belles minuscules du dixième siècle. La traduction de M. Heiberg fut suivie d'un remarquable commentaire, dans lequel Zeuthen fait une analyse pénétrante de la façon de travailler du grand géomètre de Syracuse, avec ses méthodes, essentiellement distinctes, d'invention et de démonstration. Et comment ne rappelerions-nous pas ici avec reconnaissance la collaboration entre Zeuthen et M. Heiberg, d'où est sortie la magistrale édition des Oeuvres de Paul Tannery, sur laquelle veille une pieuse sollicitude" („H. G. Zeuthen" door E. Picard in t. V van de „Mémoires Scientifiques" van Paul Tannery).

„Heiberg est dans l'histoire des sciences un maître universellement reconnu" („Preface" van Federigo Enriques van t. VII der „Mém. Sc.).

Dat nu zoo'n geleerd man een werkje, een vlugschrift, schrijft, waarin de strenge geschiedkundige en wiskundige bewijzen gansch op 't achterplan staan, toont aan dat hij er voor 't intellectueel publiek de groote lijnen van de evolutie der wetenschappen van de Oudheid, natuurphilosophie, wiskunde, natuurkunde, sterrenkunde, natuurlijke historie in een scherper licht wil stellen.

Daardoor heeft Heiberg zich jegens degenen, die geen specialisten zijn, zeer verdienstelijk gemaakt.

Van de mathematische literatuur der Vde eeuw voor Chr. is op verre na niet zooveel bewaard als van die der geneeskunde; maar

---

Jahrhundert." Kopenhagen 1903; [VIII + 434 p.] „Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter. [Die Kultur der Gegenwart. Herausgegeben von Paul Hinneberg. Berlin und Leipzig 1912. Die Mathematischen Wissenschaften. Unter Leitung von F. Klein. — Des Gesamtwerkes Teil III (Abteilung I. — Erste Lieferung).

„Les connaissances géométriques des Grecs avant la réforme platonicienne" Kopenhagen, 1913.

„Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie" Leipzig 1914. Voorts publiceerde Zeuthen verschillende verhandelingen in wiskundige tijdschriften. Hij overleed te Kopenhagen, 5 Januari 1920.

de schaarsche overblijfselen, tezamen met enkele historische vermeldingen en met de gevolgtrekkingen uit de voorhanden zijnde literatuur der bloeiperiode, laten toch toe een vaag beeld van den ontwikkelingsgang te ontwerpen. [1])

Terwijl de *rekenkunde verliep tot onvruchtbare getallenspeculaties* [2]) en nauwelijks werkelijken vooruitgang maakte op de reeds verworven kennis der oudere Pythagoreërs, *ontvouwde zich de meetkunde spoedig en heerlijk* op de stevige gronden, welke de Pythagoreërs haar gegeven hadden. [3]) Het probleem van het irrationale hield voortdurend de geesten bezig en Plato's leeraar *Theodorus van Kyrene,* maakte de theorie volledig en gaf exakte bewijzen voor de onmeetbaarheid van $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ enz. tot aan $\sqrt{17}$ met de eenheid. De hoofdgedachte echter werd door andere opgaven in beslag genomen, die tot de grondslagen der hoogere meetkunde leidden. Bij het streven naar het algemeen maken en naar de strengere bepaling harer resultaten, stiet de meetkunde op drie werkstukken, die met de elementaire middelen niet konden worden opgelost, nl. *de kwadratuur van den cirkel,* de *verdeeling van een hoek in drie gelijke deelen* en *de verdubbeling van den kubus.* [4]) De beide eerste lagen rechtstreeks in de voortzetting der werkstukken en ruimteconstructies, waarmede de Pythagoreërs zich van toen af bezighielden; het laatste (het Delische probleem), dat neerkomt op het bepalen van $\sqrt[3]{2}$ werd, naar men zegt, door een uitspraak van het Orakel op een altaar te Delos gesteld. In werkelijkheid lag het bij de werkzaamheid der Pythagoreërs dicht bij de regelmatige veelvlakken, de stereometrische overeenkomst met de verdubbeling van het vierkant.

[1]) Zie „Naschrift". (De noten behooren niet bij den Duitschen tekst).

[2]) „L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrië". (Mémoires Scientifiques de Paul Tannery; t. I, pp. 189—225). „Sur l'Arithmétique pythagoricienne" (id.; t. II p. 177—201). M. Cantor: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" (Bd. I, pp. 147—213; p. 211).

[3]) Zeuthen (H. G.): „Les connaissances géometriques des Grecs avant la réforme Platonicienne". Kopenhagen, 1913.

[4]) „De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide". (Memoires Scientifiques de P. Tannery; t. I pp. 254—280). „Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe. Divination d'une solution perdue," (id.; t. I pp. 53—61). J. E. Montucla: „Histoire des recherches sur la quadrature du cercle". Paris 1754. (1831, 2e uitg.).

Bij de behandeling van dit probleem heeft *Hippokrates van Chios*, over wien wij het verder nog zullen hebben, een groote schrede voorwaarts gemaakt, toen hij vond, dat de opgave zich liet terugbrengen tot het vinden van twee middel-evenredigen. [1])

Als $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ is, dan is $x^2 = ay$, $y^2 = xb$,

dus $x^4 = a^2xb$ of $x^3 = a^2b$ en, indien $b = 2a$ is, $x^3 = 2a^3$, $x$ is de gezochte ribbe van den kubus, die dubbel zoo groot is als die met de ribbe $a$.

In dezen vorm heeft het probleem de wiskundigen der IVde eeuw voor Chr. beziggehouden en tot de belangrijkste ontdekkingen geleid.

Voor de verdeeling van een hoek in drie gelijke deelen werd door den bekenden sophist *Hippias van Elis* [2]) waarschijnlijk een bijzondere kromme gevonden en daarmee de *eerste stap tot de behandeling van hoogere meetkundige vormen* gedaan. Die zelfde kromme kon ook voor de kwadratuur van den cirkel gebruikt worden en is misschien wel bij het onderzoek daarvan gevonden. Dit probleem, dat Anaxagoras reeds onledig hield, prikkelde toen, evenals tegenwoordig nog, de scherpzinnigheid der dilettanten; van twee sophisten, Antiphon en Bryson, zijn pogingen ter oplossing bekend, waarvan die van Bryson alleen een strikval is, terwijl *Antiphon* [3]) als 't ware in 't voorbijgaan een modern idee aanraakte (de cirkel is een veelhoek met oneindig vele zijden), die echter bij hem een zuivere ingeving was, en toen in elk geval bij de mathematici geen waardeering vond, *daar zij het begrip „oneindig" angstig vermeden.* [4])

---

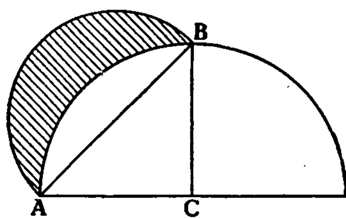
[1]) J. Versluys. „Beknopte Geschiedenis der Wiskunde" (pp. 24—26). (Noordhoff, 1902).
De opgave liet zich terugvoeren tot het vinden van twee meetkundig middel-evenredigen tusschen de ribbe der kube en het dubbele van de ribbe.

[2]) „Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité" (Mémoires Scientifiques de P. Tannery; t., II.)
Pappus' Collectio Mathematica, IV, 45, p. 284 van de editie Fred. Hultsch.
J. Versluys. „Beknopte Gesch. der Wisk." p. 23.
Die bijzondere kromme is de „kwadratrix" waarvan de vergelijking in poolcoördinaten is $\frac{1}{2}\pi\varrho \sin\varphi = R\varphi$.

[3]) „Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules" (Mém.: Sc. de P. Tannery; t. I; pp. 47 en 48).

[4]) „Questions relatives aux Mathématiques élémentaires" fasc. I:

Hoe populair het probleem was in Athene tegen het einde van de Vde eeuw, ziet men het best hieruit, dat Aristophanes in de „Vogels" (van 't jaar 414) het zijn publiek voorstellen kan als de nieuwste abstractie der wiskundigen. Het heeft den reeds gemelden Hippokrates van Chios tot een hoogst scherpzinnige onderzoeking aangezet; daarin hebben we voortreffelijke gegevens, samen een vast punt van onschatbare waarde voor het meten van de door de wiskunde reeds bereikte hoogte.




Hippokrates heeft gevonden, dat de „maan" (op de figuur gestreept), begrensd door èen halven cirkel en een boog onder 90°, gelijk is aan den driehoek A B C (d.i. aan de helft van den gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek, die in den halven cirkel beschreven is) en dat dus die „maan" gekwadrateerd kan worden. Het is begrijpelijk dat dit voorbeeld van gelijkheid, een door cirkelbogen begrensde en een door rechte lijnen begrensde figuur, zijn opmerkzaamheid boeide. Hij heeft dan zoolang gezocht, totdat hij nog twee zulke maantjes vond, wier buitenste bogen telkens grooter en kleiner dan een halven cirkel zijn, en, bovendien nog een derde, *die bij een cirkel opgesteld een kwadrateerbare figuur blijkt.* [1])

De overlevering schrijft hem dan de drogreden toe, dat hij elk maantje en bijgevolg ook (door eenvoudige aftrekking) den cirkel kon kwadrateeren, ofschoon hij slechts voor heel bijzondere gevallen de opgave opgelost had. Dat kan echter de bewondering voor zijne werken niet verminderen. De ten deele waarlijk moeilijke en breedvoerige bewijzen zijn met fijne scherpzinnigheid gevonden en uitge-

---

L'evolution des idées géométriques dans la pensée Grecque" par J. Enriques; Paris, Gauthiers—Villars, 1927.

[1]) „Sur les fragments d'Eudème de Rhodes relatifs à l'histoire des mathématiques" (Mém. Sc. de P. Tannery, t. I, p. 168—177).

„Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules" (Mém. Sc., t. I, p. 359—365).

„Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules" (id. p. 46—52; bijzonder p. 119).

M. Cantor: „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" (Vol. I, p. 207—211).

J. E. Montucla: „Histoire des Mathématiques" (Parijs, 1799—1802, 4 vol.) (vol. I, p. 453).

werkt; hieruit blijkt, hoe vertrouwd zij waren met de eigenschappen van de cirkelsegmenten en hunne hoeken.

Het einddoel is de door Hippokrates zelf bewezen eigenschap: de *oppervlakten van twee cirkels zijn evenredig met de vierkanten hunner middellijnen.* [1])

Niettegenstaande de oplossing slechts in beperkte mate gelukt was, kan de Vde eeuw de verdienste worden aangerekend de drie genoemde vruchtbare problemen te hebben gesteld en den weg aan de hoogere wiskunde der komende tijden te hebben getoond. Eveneens door de elementaire wiskunde heeft dezelfde periode zich een groote verdienste verworven: *Hippokrates stelde het eerste leerboek der meetkunde op.*

Tot dusverre was de verworven kennis in de Pythagoreesche schôol gedeeltelijk als geheim overgeleverd; nu werd het geheel tot een stelsel samengevat en op geschikte wijze geformuleerd. Door het openbaar maken kreeg ieder, die lust voelde en de bekwaamheid daartoe had, een basis te zijner beschikking, waarop verder kon gebouwd worden.

Dat eerste leerboek heeft voorzeker noch in opbouw noch in bewijsvoering de onaantastbare stevigheid en de strengheid van de Elementen van Euclides [2]); maar om verder te gaan was voorloopig de reëele verworven kennis de voornaamste; de formeele volmaking kon dan niet lang op zich laten wachten.

Wij zien derhalve, dat de exacte wetenschappen in het onderricht van de jeugd een rol spelen. Zoowel de sophist Hippias als de Pythagoreër Oinopides onderwezen te Athene wiskunde en sterrenkunde.

Ook in de toepassing op het leven werd de wetenschap aangewend. *Meton* maakte van den vooruitgang der sterrenkunde gebruik voor eene zeer noodige hervorming van den attischen kalender door het opstellen van een *19-jarigen schrikkeltijdkring* [3]) ter herstelling van de overeenstemming van het burgerlijk maanjaar met het zonnejaar.

---

[1]) Hij wist eveneens, dat de oppervlakken van gelijkvormige cirkelsegmenten zich verhouden als de kwadraten hunner koorden.

[2]) Zie Dr. E. J. Dijksterhuis *De elementen van Euclides.* Groningen. P. Noordhoff 1929.

[3]) De 19-jarige schrikkeltijdkring van Meton begon te tellen van de nieuwe maan af, die volgde op den zomerzonnestand van — 433.

Het tooneel deed de wetenschappelijke behandeling van de perspektief ontstaan. Daarin werden toen betrokken zekere Anaxagoras en Demokrit; wij zijn echter niet in staat hunne resultaten in 't bijzonder aan te geven. We weten echter dat *Demokrit's* geniale blik reeds de belangrijke stellingen *over den inhoud van de pyramide en van den kegel* ingezien had, alhoewel zijn bewijs niet voldeed aan de strenge eischen der latere wiskundigen. Verder doet veel in *Demokrit* een voorlooper van Archimedes' infinitesimaalrekening vermoeden.

Fr. Mertens en E. de Hairs.

Naschift. Ofschoon we weinig of niets afweten omtrent de levensgebeurtenissen en wisselvalligheden van de voornaamste wiskundigen der Oudheid, zijn we oneindig veel beter ingelicht over den inhoud en de beteekenis van hun meesterwerken.

De overlevering in verband gebracht met de getuigenissen van Plato [1]) (—430 tot —347), den stichter der Academie, en, die voor het eerst de kegelsneden zou bestudeerd hebben, van Aristoteles (—384 tot —324), stichter der peripatetische school, met enkele stukken van een meetkundige verhandeling van Hippokrates van Chios, [2]) die bewaard gebleven zijn, vormen de bronnen voor een eerste onderzoek. Verder zijn de „Elementen" van Euklides, hoewel zij geen geschiedkundige aanteekeningen bevatten, een bewijs van den prachtigen opbloei der Grieksche wiskunde vóór Euklides. De inlichtingen van Archimedes en Apollonius, die we af en toe in hun geschriften lezen zijn eveneens een stevig punt voor de geschiedenis der wiskunde.

We weten ook, dat de peripatetische philosoof Eudemos van Rhodes [3]) (—350 tot —290), leerling van Aristoteles, de eerste geschiedenis der wiskunde opstelde, bevattende de geschiedenis

---

[1]) Platon „Oeuvres Complètes" (Collection des Un. de France; Société d'édition Les Belles lettres. Paris 1923—25). Traduction de A. Croiset, L. Bodin, A Diès.

[2]) „Sur les fragments d'Eudème de Rhodos relatifs à l'histoire des mathématiques" (Mémoires Scientifiques de P. Tannery; t. I, p. 168—177).

Léonard Spengel: „Eudemi Rhodii peripatetici fragmenta quae supersunt." Berlijn, Calvary, 1870 (eerste uitgave 1865).

[3]) Les Eléments de Géométrie d'Euclide, traduits littéralement par J. Peyrard. Paris, 1809, (1816), in 8°.

der rekenkunde, der sterrenkunde en der meetkunde. Enkele fragmenten zijn bewaard gebleven.

Eutokius deelt ons mede, dat de Grieksche sterrenkundige Geminus [1]) (deze leefde een halve eeuw voor Chr.) geschiedkundige aanteekeningen in zijn werken had opgenomen.

De inlichtingen van Plutarkus, Proklos, Eutokius van Askalon, Diodorus van Sicilië, Vitruvius en van Pappus van Alexandrië zijn van groote beteekenis voor de kennis der geschriften, die verloren gegaan zijn, en voor de belangrijkste wetenschappelijke ontdekkingen. Zoo bevat: „Les vies des hommes illustres Grecs et Romains" van den Griekschen moralist Plutarchus, [2]) geboren te Chaerone in Bestië ongeveer 50 voor Chr., aanteekeningen over Archimedes, Eratosthenes, Ptolemaeus, Demokrit, Heraklitus, Hippias en Zenon.

De Grieksche wijsgeer Proklos, [3]) bestuurder der Atheensche school, geboren te Konstantinopel in 412 en overleden in 485, geeft interessante bijzonderheden over den oorsprong der stellingen en bovendien een lijst der wiskundigen, die vóór Euklides leefden in zijn „Toelichting op het eerste boek van de Elementen van Euclides". Volgens P. Tannery was het onmogelijk, dat Proklos van Eudemos' geschiedenis der wiskunde gebruik maakte, doch wel van Geminus' geschriften.

Even belangrijk zijn de toelichtingen van Eutokius [4]) (550) over

---

[1]) Grieksch sterrenkundige; was vermoedelijk afkomstig uit Rhodus en leefde ongeveer een halve eeuw voor onze tijdrekening. Hij schreef een „Inleiding tot de Sterrenkunde", een uittreksel uit het werk „Over de Meteoren" van Posidonius. Het is met de Latijnsche vertaling van Hildoricus in 1603 te Leiden en in 1819 in den „Ptolemaeus" van Halmas te Parijs verschenen. We melden nog de nieuwere editie van Manutius (1900).

[2]) „Les vies des hommes illustres grecs et romains. Comparées l'une avec l'autre par Plutarque de Chœronée: translatées par M. Jacques Amyot, conseiller du Roy. Paris, François Gueffier. MDCIX, 2 vol.

Oeuvres Complètes de Plutarque, traduites du Grec par Amyot: avec des notes et des observations par M. M. Brotier et Vauvilliers. Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée par E. Clavier. Paris, Cussae, 1801—1805, 25 vol. in 8°.

Michelet: „Examen des Vies des hommes illustres de Plutarque." Paris 1819.

[3]) „Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, recognovit G. Friedlein. Leipzig, 1873, in - 8°.

[4]) De „Toelichtingen" van Eutokius verschenen in Halley's uitgave der Kegelsneden van Apollonius, „Appollonii Pergaei conicorum

het „Leerboek over den bol en den cylinder" en over den „Cirkelmeting" van Archimedes, en over de „Kegelsneden" van Apollonius van Perga.

Voor de natuurkunde en de natuurlijke historie treedt de „Geschiedkundige Bibliotheek" van Diodorus [1]) van Sicilië meer op den voorgrond. Hij was een Grieksch geschiedschrijver, geboren te Agyrium, tijdgenoot van Cesar en Augustus en bezocht verschillende landen van Europa en Azië om allerlei inlichtingen in te winnen over wetenschappen, aardrijkskunde, geschiedenis enz. Die zoo verkregen gegevens gaven hem de middelen om na dertig jaar arbeid zijn „Geschiedkundige Bibliotheek" op te bouwen. Van de 40 boeken zijn er slechts 15 bewaard gebleven.

Het „Leerboek der Architectuur" [2]) (10 boeken in een deel) van Marcus Vitruvius, ingenieur in de dienst van Cesar, verschaft ons belangrijke gegevens over de mechanika en de werktuigen.

De Grieksche wiskundige van Alexandrië, Pappus, [3]) die in de

---

octo et Sereni Antisensis de sectione Cylindri et Coni libri duo. Oxoniae, in-fol.; 1710; en in de eerste Grieksch-Latijnsche uitgaven van de werken van Archimedes door Thomas Gehauff (Venatorius), te Bazel in 1544: „Archimedes opera, quae quidem extant omnia, nunc primum et graece et latine in lucem edita; adjecta sunt Entocii Ascalonitae in eosdem Archimedos libros commentaria, item graece et latine, nunquem antea excusa".

[1]) Sept Livres (liv. XI—XVII, commençant au voyage de Xerxes et finissant à la mort d'Alexandrie) des histoires de Diodore Sicilien neuvellement traduyts de grec en Franceys par Jacques Amyot. Paris, Michel de Vascosan, 1554 in fol. Ferd. Hoefer: „Bibliothèque historique de Diodore de Sicile" (eerste uitgave 1846; tweede uitgave 1865 (Parijs). 4 vol. in 12).

[2]) E. Cardien en A. Coussin: „Les dix livres d'Architecture de Vitruve avec les notes de Perrault". Paris, Morel, 1850, 2 vol. in - 4º.

[3]) De „Collectio Mathematica" werd niet overgezet in een levende taal.

„Pappi Alexandrini Mathematicas Collectiones, a Fed. Commandino Urbinate in latinum conversae et commentariis illustratae." Pisauri, 1588, in 4º. Manolesius bezorgde te Bologne, in 1660, een nieuwe uitgave.

„Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt edidit, latina interpretatione et commentariis instruscit Fred. Hultsch". Berolini, 1875—1878, 3 vol., in - 8. (De beste uitgave).

„Die Sammlung des Pappus von Alexandrien. Buch 7 und 8. Griechisch und Deutsch herausgegeben von C. J. Gerhardt." Halle, 1871.

„Sur la date de Pappus d'Alexandrie" par M. l'Abbé Rome, in Annales de la Société Scientifique de Bruxelles; Serie A, 2de fascicule, 1927; pp. 46—48. Zie ook: „Mémoires Scientifiques de P. Tannery", II.

tweede helft der vierde eeuw na Chr. leefde, schreef een werk dat in de geschiedenis der wetenschappen geboekt staat onder den titel: „Collectio Mathematica", bestaande uit acht boeken: Het eerste boek is verloren gegaan; van het 2de is een fragment bewaard; de andere zijn bewaard gebleven en behandelen hoofdzakelijk de zuivere meetkunde (in boek 3 het Delische werkstuk); in boek 6 wordt de sterrenkunde en in boek 8 de mechanika behandeld.

De „Collectio Mathematica" is geen leerboek en de besproken kwesties zijn er niet behoorlijk gerangschikt.

Het overgroote aantal stellingen, werkstukken en hulpstellingen, dat we er in aantreffen, geven gewichtige aanduidingen over de voornaamste geschriften en onderzoekingen van bijna al de wiskundigen der Alexandrijnsche school.

Opgemerkt zij, dat een klaar inzicht in de „Collectio Mathematica" haast onmogelijk blijkt, wanneer men zich niet al te best thuis gevoelt in de Helleensche wiskunde, want de stellingen schijnen er niet het minste onderlinge verband te hebben. Het zevende boek is het belangrijkste, omdat er de meetkundige analyse der ouden in besproken wordt.

E. De Hairs.